

Persamaan Diferensial

Minggu 1: Klasifikasi PDB/PDP, IVP, & Pemodelan Fisik

Novalio Daratha & Muhammad Arfan
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Outline Pembelajaran

- 1 Pengantar: PDB vs PDP
- 2 Klasifikasi: Orde & Linieritas
- 3 Solusi Umum, Khusus & IVP
- 4 Pemodelan Fisis: Hukum Kirchhoff

Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Definisi

Persamaan yang mengandung turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap **satu variabel bebas tunggal** (misalnya: waktu t).

Dalam Teknik Elektro, PDB sering muncul pada sistem terpusat (*lumped systems*).

- Pengosongan kapasitor: $R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$
- Sistem osilasi RLC: $L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$

Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Definisi

Persamaan yang mengandung turunan parsial terhadap **dua atau lebih variabel bebas** (misalnya: koordinat ruang x, y, z dan waktu t).

Dalam Teknik Elektro, PDP muncul pada sistem terdistribusi (*distributed systems*).

- Persamaan Laplace (Elektrostatik 2D): $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$
- Persamaan Gelombang (Transmisi Sinyal): $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

Kuis Interaktif: PDB atau PDP?

Tebak Persamaan Berikut:

1 $\frac{d^3y}{dx^3} - 4x \frac{dy}{dx} = e^x$

Kuis Interaktif: PDB atau PDP?

Tebak Persamaan Berikut:

① $\frac{d^3y}{dx^3} - 4x \frac{dy}{dx} = e^x \quad \rightarrow \text{PDB (Hanya satu variabel bebas: } x)$

Kuis Interaktif: PDB atau PDP?

Tebak Persamaan Berikut:

① $\frac{d^3y}{dx^3} - 4x \frac{dy}{dx} = e^x \quad \rightarrow \text{PDB (Hanya satu variabel bebas: } x)$

② $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$

Kuis Interaktif: PDB atau PDP?

Tebak Persamaan Berikut:

① $\frac{d^3y}{dx^3} - 4x \frac{dy}{dx} = e^x \quad \rightarrow \text{PDB (Hanya satu variabel bebas: } x)$

② $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \rightarrow \text{PDP (Variabel bebas: } t, x, y)$

Kuis Interaktif: PDB atau PDP?

Tebak Persamaan Berikut:

① $\frac{d^3y}{dx^3} - 4x \frac{dy}{dx} = e^x \rightarrow \text{PDB (Hanya satu variabel bebas: } x)$

② $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \rightarrow \text{PDP (Variabel bebas: } t, x, y)$

③ $L \frac{di}{dt} + Ri = V_0 \sin(\omega t)$

Kuis Interaktif: PDB atau PDP?

Tebak Persamaan Berikut:

① $\frac{d^3y}{dx^3} - 4x \frac{dy}{dx} = e^x \rightarrow \text{PDB (Hanya satu variabel bebas: } x)$

② $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \rightarrow \text{PDP (Variabel bebas: } t, x, y)$

③ $L \frac{di}{dt} + Ri = V_0 \sin(\omega t) \rightarrow \text{PDB (Hanya variabel bebas: } t)$

Klasifikasi: Orde

Konsep Orde (Tingkat)

Orde suatu persamaan diferensial ditentukan oleh **turunan tertinggi** yang terdapat dalam persamaan tersebut.

Konsep Orde (Tingkat)

Orde suatu persamaan diferensial ditentukan oleh **turunan tertinggi** yang terdapat dalam persamaan tersebut.

Contoh Analisis:

- $y'' + 3y' + 2y = 0$

Klasifikasi: Orde

Konsep Orde (Tingkat)

Orde suatu persamaan diferensial ditentukan oleh **turunan tertinggi** yang terdapat dalam persamaan tersebut.

Contoh Analisis:

- $y'' + 3y' + 2y = 0 \rightarrow$ **Orde 2** (karena ada turunan kedua y'')

Klasifikasi: Orde

Konsep Orde (Tingkat)

Orde suatu persamaan diferensial ditentukan oleh **turunan tertinggi** yang terdapat dalam persamaan tersebut.

Contoh Analisis:

- $y'' + 3y' + 2y = 0 \rightarrow$ Orde 2 (karena ada turunan kedua y'')
- $\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + y = 0$

Klasifikasi: Orde

Konsep Orde (Tingkat)

Orde suatu persamaan diferensial ditentukan oleh **turunan tertinggi** yang terdapat dalam persamaan tersebut.

Contoh Analisis:

- $y'' + 3y' + 2y = 0 \rightarrow$ **Orde 2** (karena ada turunan kedua y'')
- $\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + y = 0 \rightarrow$ **Orde 1** (turunan tertingginya hanya turunan pertama, sedangkan pangkat 3 adalah "derajat", bukan orde!)

Klasifikasi: Linieritas

Syarat Linieritas

Suatu PDB disebut linier jika:

- 1 Variabel terikat y dan semua turunannya hanya berpangkat 1.
- 2 Tidak ada perkalian antara y dengan turunannya (misal $y \frac{dy}{dx}$).
- 3 Tidak ada fungsi transendental yang memuat y (misal $\sin(y)$ atau e^y).

Klasifikasi: Linieritas

Syarat Linieritas

Suatu PDB disebut linier jika:

- 1 Variabel terikat y dan semua turunannya hanya berpangkat 1.
- 2 Tidak ada perkalian antara y dengan turunannya (misal $y \frac{dy}{dx}$).
- 3 Tidak ada fungsi transendental yang memuat y (misal $\sin(y)$ atau e^y).

Identifikasi:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = \sin(t)$

Klasifikasi: Linieritas

Syarat Linieritas

Suatu PDB disebut linier jika:

- 1 Variabel terikat y dan semua turunannya hanya berpangkat 1.
- 2 Tidak ada perkalian antara y dengan turunannya (misal $y \frac{dy}{dx}$).
- 3 Tidak ada fungsi transendental yang memuat y (misal $\sin(y)$ atau e^y).

Identifikasi:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = \sin(t) \rightarrow$ **Linier** ($\sin(t)$ fungsi dari variabel bebas t , bukan x).

Klasifikasi: Linieritas

Syarat Linieritas

Suatu PDB disebut linier jika:

- 1 Variabel terikat y dan semua turunannya hanya berpangkat 1.
- 2 Tidak ada perkalian antara y dengan turunannya (misal $y \frac{dy}{dx}$).
- 3 Tidak ada fungsi transendental yang memuat y (misal $\sin(y)$ atau e^y).

Identifikasi:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = \sin(t) \rightarrow$ **Linier** ($\sin(t)$ fungsi dari variabel bebas t , bukan x).
- $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

Klasifikasi: Linieritas

Syarat Linieritas

Suatu PDB disebut linier jika:

- 1 Variabel terikat y dan semua turunannya hanya berpangkat 1.
- 2 Tidak ada perkalian antara y dengan turunannya (misal $y \frac{dy}{dx}$).
- 3 Tidak ada fungsi transendental yang memuat y (misal $\sin(y)$ atau e^y).

Identifikasi:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = \sin(t) \rightarrow$ **Linier** ($\sin(t)$ fungsi dari variabel bebas t , bukan x).
- $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \rightarrow$ **Non-Linier** (karena ada suku y^2).

Klasifikasi: Linieritas

Syarat Linieritas

Suatu PDB disebut linier jika:

- 1 Variabel terikat y dan semua turunannya hanya berpangkat 1.
- 2 Tidak ada perkalian antara y dengan turunannya (misal $y \frac{dy}{dx}$).
- 3 Tidak ada fungsi transendental yang memuat y (misal $\sin(y)$ atau e^y).

Identifikasi:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = \sin(t) \rightarrow$ **Linier** ($\sin(t)$ fungsi dari variabel bebas t , bukan x).
- $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \rightarrow$ **Non-Linier** (karena ada suku y^2).
- $\cos(x) \frac{dy}{dx} = y$

Klasifikasi: Linieritas

Syarat Linieritas

Suatu PDB disebut linier jika:

- 1 Variabel terikat y dan semua turunannya hanya berpangkat 1.
- 2 Tidak ada perkalian antara y dengan turunannya (misal $y \frac{dy}{dx}$).
- 3 Tidak ada fungsi transendental yang memuat y (misal $\sin(y)$ atau e^y).

Identifikasi:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = \sin(t) \rightarrow$ **Linier** ($\sin(t)$ fungsi dari variabel bebas t , bukan x).
- $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \rightarrow$ **Non-Linier** (karena ada suku y^2).
- $\cos(x) \frac{dy}{dx} = y \rightarrow$ **Linier**.

Konsep Solusi Umum vs Khusus

Solusi Umum

Solusi yang masih memuat konstanta integrasi sembarang (C). Merepresentasikan himpunan/keluarga kurva.

Misal PDB: $y' = y \implies y(t) = Ce^t$.

Konsep Solusi Umum vs Khusus

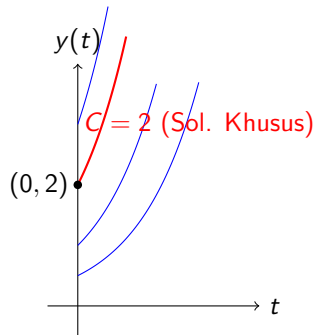
Solusi Umum

Solusi yang masih memuat konstanta integrasi sembarang (C). Merepresentasikan himpunan/keluarga kurva.

Misal PDB: $y' = y \implies y(t) = Ce^t$.

Solusi Khusus

Jika diberikan satu kondisi awal (*Initial Condition*), kita bisa mencari kurva unik yang melewati titik tersebut.



Initial Value Problem (IVP): Contoh Hitungan

Diberikan suatu PDB: $\frac{dy}{dt} = -3y$

- 1 **Cari Solusi Umum (Diketahui dari modul sebelumnya):**

Initial Value Problem (IVP): Contoh Hitungan

Diberikan suatu PDB: $\frac{dy}{dt} = -3y$

- 1 **Cari Solusi Umum (Diketahui dari modul sebelumnya):**

$$y(t) = Ce^{-3t}$$

Initial Value Problem (IVP): Contoh Hitungan

Diberikan suatu PDB: $\frac{dy}{dt} = -3y$

- 1 **Cari Solusi Umum (Diketahui dari modul sebelumnya):**

$$y(t) = Ce^{-3t}$$

- 2 **Terapkan Syarat Awal (IVP):**

Diketahui pada saat $t = 0$, nilai $y = 10$ atau $y(0) = 10$.

Initial Value Problem (IVP): Contoh Hitungan

Diberikan suatu PDB: $\frac{dy}{dt} = -3y$

- 1 **Cari Solusi Umum (Diketahui dari modul sebelumnya):**

$$y(t) = Ce^{-3t}$$

- 2 **Terapkan Syarat Awal (IVP):**

Diketahui pada saat $t = 0$, nilai $y = 10$ atau $y(0) = 10$.

- 3 **Substitusi ke Solusi Umum:**

$$10 = Ce^{-3(0)}$$

Initial Value Problem (IVP): Contoh Hitungan

Diberikan suatu PDB: $\frac{dy}{dt} = -3y$

- 1 **Cari Solusi Umum (Diketahui dari modul sebelumnya):**

$$y(t) = Ce^{-3t}$$

- 2 **Terapkan Syarat Awal (IVP):**

Diketahui pada saat $t = 0$, nilai $y = 10$ atau $y(0) = 10$.

- 3 **Substitusi ke Solusi Umum:**

$$10 = Ce^{-3(0)}$$

$$10 = Ce^0 \implies 10 = C(1) \implies C = 10$$

Initial Value Problem (IVP): Contoh Hitungan

Diberikan suatu PDB: $\frac{dy}{dt} = -3y$

- 1 **Cari Solusi Umum (Diketahui dari modul sebelumnya):**

$$y(t) = Ce^{-3t}$$

- 2 **Terapkan Syarat Awal (IVP):**

Diketahui pada saat $t = 0$, nilai $y = 10$ atau $y(0) = 10$.

- 3 **Substitusi ke Solusi Umum:**

$$10 = Ce^{-3(0)}$$

$$10 = Ce^0 \implies 10 = C(1) \implies C = 10$$

- 4 **Tuliskan Solusi Khusus Akhir:**

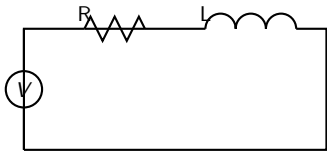
$$y(t) = 10e^{-3t}$$

Pemodelan Fisis: Rangkaian RL

Dalam Teknik Elektro, dinamika rangkaian dimodelkan dengan **Hukum Tegangan Kirchhoff (KVL)**:
 $\sum V = 0$.

Hukum KVL untuk *loop* tertutup di samping:

$$V_R + V_L = V(t) \quad (1)$$



Pemodelan Fisis: Rangkaian RL

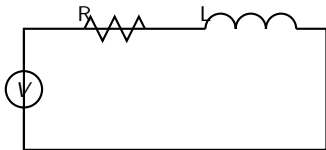
Dalam Teknik Elektro, dinamika rangkaian dimodelkan dengan **Hukum Tegangan Kirchhoff (KVL)**:
 $\sum V = 0$.

Hukum KVL untuk *loop* tertutup di samping:

$$V_R + V_L = V(t) \quad (1)$$

Substitusi persamaan karakteristik komponen:

- $V_R = i(t)R$ (Hukum Ohm)
- $V_L = L \frac{di(t)}{dt}$ (Hukum Faraday/Induksi)



Pemodelan Fisis: Rangkaian RL

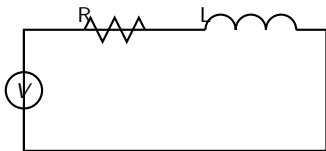
Dalam Teknik Elektro, dinamika rangkaian dimodelkan dengan **Hukum Tegangan Kirchhoff (KVL)**:
 $\sum V = 0$.

Hukum KVL untuk *loop* tertutup di samping:

$$V_R + V_L = V(t) \quad (1)$$

Substitusi persamaan karakteristik komponen:

- $V_R = i(t)R$ (Hukum Ohm)
- $V_L = L \frac{di(t)}{dt}$ (Hukum Faraday/Induksi)



Model Matematika Akhir (PDB Orde 1)

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V(t) \quad (2)$$

Terima Kasih

Sesi Latihan Mandiri & Diskusi Tanya Jawab

Novalio Daratha & Muhammad Arfan
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu