

Persamaan Diferensial

Minggu 10: Metode Pemisahan Variabel (*Separation of Variables*) pada PDP

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 4)

- **CPMK 4.1:** Memahami prinsip dasar pemisahan variabel: memecah PDP multi-variabel menjadi 2 atau lebih PDB independen.
- **CPMK 4.2:** Memahami peran konstanta pemisahan (*separation constant* k atau $-\lambda^2$) dan justifikasi fisiknya.
- **CPMK 4.3:** Menerapkan syarat batas (*Boundary Conditions*) Dirichlet dan Neumann pada PDB spasial (Masalah Nilai Eigen).
- **CPMK 4.4:** Menggabungkan solusi eigen menggunakan prinsip superposisi dan koefisien Fourier.

Daftar Isi

- 1 Prinsip Dasar Pemisahan Variabel
- 2 Studi Kasus: Pemisahan pada Persamaan Panas 1D
- 3 Kuis & Rangkuman

Konsep Pemisahan Produk Fungsi

Misalkan kita ingin mencari solusi $u(x, t)$ dari PDP linear:

Asumsi Pemisahan Produk

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Fungsi multi-variabel $u(x, t)$ diasumsikan merupakan perkalian antara fungsi murni spasial $X(x)$ dan fungsi murni temporal $T(t)$.

Konsep Pemisahan Produk Fungsi

Misalkan kita ingin mencari solusi $u(x, t)$ dari PDP linear:

Asumsi Pemisahan Produk

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Fungsi multi-variabel $u(x, t)$ diasumsikan merupakan perkalian antara fungsi murni spasial $X(x)$ dan fungsi murni temporal $T(t)$.

Turunan parsial menjadi turunan total biasa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x) \frac{dT}{dt} = XT', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} T(t) = X''T$$

Penurunan Dua PDB Terpisah

Tinjau: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Penurunan Dua PDB Terpisah

Tinjau: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Substitusi $u(x, t) = X(x)T(t)$:

$$XT' = \alpha X''T \implies \frac{T'}{\alpha T} = \frac{X''}{X}$$

Penurunan Dua PDB Terpisah

Tinjau: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Substitusi $u(x, t) = X(x)T(t)$:

$$XT' = \alpha X''T \implies \frac{T'}{\alpha T} = \frac{X''}{X}$$

Argumen Konstanta Pemisahan

Ruas kiri hanya bergantung pada t , ruas kanan hanya bergantung pada x . Agar persamaan ini bernilai sama untuk setiap x dan t sembarang, kedua ruas harus bernilai konstan yang sama ($-\lambda^2$):

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \implies X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (\text{PDB Spasial})$$

$$\frac{T'}{\alpha T} = -\lambda^2 \implies T' + \alpha \lambda^2 T = 0 \quad (\text{PDB Waktu})$$

Penyelesaian Masalah Nilai Eigen Spasial ($X(x)$)

Untuk konduktor panjang L dengan ujung digroundkan $u(0, t) = 0$ dan $u(L, t) = 0$:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

Penyelesaian Masalah Nilai Eigen Spasial ($X(x)$)

Untuk konduktor panjang L dengan ujung digroundkan $u(0, t) = 0$ dan $u(L, t) = 0$:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

Solusi umum PDB spasial $X'' + \lambda^2 X = 0$:

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)$$

Penyelesaian Masalah Nilai Eigen Spasial ($X(x)$)

Untuk konduktor panjang L dengan ujung digroundkan $u(0, t) = 0$ dan $u(L, t) = 0$:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

Solusi umum PDB spasial $X'' + \lambda^2 X = 0$:

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)$$

- $X(0) = 0 \implies C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \implies C_1 = 0.$

Penyelesaian Masalah Nilai Eigen Spasial ($X(x)$)

Untuk konduktor panjang L dengan ujung digroundkan $u(0, t) = 0$ dan $u(L, t) = 0$:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

Solusi umum PDB spasial $X'' + \lambda^2 X = 0$:

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)$$

- $X(0) = 0 \implies C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \implies C_1 = 0$.
- $X(L) = 0 \implies C_2 \sin(\lambda L) = 0$. Agar solusi non-trivial ($C_2 \neq 0$):

$$\sin(\lambda L) = 0 \implies \lambda L = n\pi \implies \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Penyelesaian Masalah Nilai Eigen Spasial ($X(x)$)

Untuk konduktor panjang L dengan ujung digroundkan $u(0, t) = 0$ dan $u(L, t) = 0$:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

Solusi umum PDB spasial $X'' + \lambda^2 X = 0$:

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)$$

- $X(0) = 0 \implies C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \implies C_1 = 0$.
- $X(L) = 0 \implies C_2 \sin(\lambda L) = 0$. Agar solusi non-trivial ($C_2 \neq 0$):

$$\sin(\lambda L) = 0 \implies \lambda L = n\pi \implies \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Fungsi Eigen (*Eigenfunctions*)

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Penyelesaian Bagian Waktu ($T_n(t)$) & Superposisi

PDB Waktu: $T'_n + \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n = 0.$

Penyelesaian Bagian Waktu ($T_n(t)$) & Superposisi

PDB Waktu: $T'_n + \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n = 0$. Solusi eksponensial meluruh:

$$T_n(t) = B_n e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Penyelesaian Bagian Waktu ($T_n(t)$) & Superposisi

PDB Waktu: $T'_n + \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n = 0$. Solusi eksponensial meluruh:

$$T_n(t) = B_n e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Solusi Total Superposisi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

dengan $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ diperoleh dari syarat awal $u(x, 0) = f(x)$.

Pertanyaan: Mengapa konstanta pemisahan harus dipilih bernilai negatif ($-\lambda^2$) dan bukan positif ($+\lambda^2$)?

Pertanyaan: Mengapa konstanta pemisahan harus dipilih bernilai negatif ($-\lambda^2$) dan bukan positif ($+\lambda^2$)?

Jawaban:

Secara fisik:

- 1 Jika konstanta positif ($+\lambda^2$), solusi spasial menjadi fungsi hiperbolik $\sinh(\lambda x)$, $\cosh(\lambda x)$ yang tidak dapat memenuhi syarat batas nol di kedua ujung.
- 2 Solusi waktu akan menjadi $T(t) \propto e^{+\lambda^2 \alpha t}$, yang berarti suhu atau energi membesar tanpa batas menuju tak terhingga (tidak stabil dan melanggar hukum termodinamika/konservasi energi).

Rangkuman Materi Minggu 10

- 1 Pemisahan variabel mentransformasikan 1 PDP menjadi kumpulan PDB yang dapat diselesaikan secara independen.
- 2 Syarat batas menghasilkan nilai eigen diskrit (λ_n) dan fungsi harmonik eigen ($X_n(x)$).
- 3 Superposisi tak hingga menyatukan seluruh modus gelombang untuk mencocokkan kondisi awal sembarang.