

Persamaan Diferensial

Minggu 11: Persamaan Gelombang 1D pada Saluran Transmisi Elektromagnetik

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 4)

- **CPMK 4.1:** Menurunkan Persamaan Gelombang 1D dari persamaan Telegraf pada saluran transmisi.
- **CPMK 4.2:** Menyelesaikan persamaan gelombang menggunakan Solusi Perjalanan Gelombang d'Alembert.
- **CPMK 4.3:** Menganalisis gelombang berdiri dan fenomena refleksi pada ujung saluran.
- **CPMK 4.4:** Mengamati simulasi numerik perambatan gelombang FDTD menggunakan Julia.

Daftar Isi

- 1 Penurunan dari Rangkaian Saluran Transmisi
- 2 Solusi d'Alembert: Gelombang Berjalan
- 3 Refleksi Gelombang pada Ujung Saluran
- 4 Praktikum Julia & Kuis

Persamaan Telegraf (Lossless Line)

Tinjau segmen saluran transmisi mikro sepanjang Δx dengan induktansi L' dan kapasitansi C' per meter:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{Hukum Faraday/KVL})$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C' \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{Hukum Arus Maxwell/KCL})$$

Persamaan Telegraf (Lossless Line)

Tinjau segmen saluran transmisi mikro sepanjang Δx dengan induktansi L' dan kapasitansi C' per meter:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{Hukum Faraday/KVL})$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C' \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{Hukum Arus Maxwell/KCL})$$

Turunkan persamaan tegangan terhadap x dan persamaan arus terhadap t :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L' \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -L' \frac{\partial}{\partial t} \left(-C' \frac{\partial v}{\partial t} \right) = L' C' \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Persamaan Telegraph (Lossless Line)

Tinjau segmen saluran transmisi mikro sepanjang Δx dengan induktansi L' dan kapasitansi C' per meter:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{Hukum Faraday/KVL})$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C' \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{Hukum Arus Maxwell/KCL})$$

Turunkan persamaan tegangan terhadap x dan persamaan arus terhadap t :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L' \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -L' \frac{\partial}{\partial t} \left(-C' \frac{\partial v}{\partial t} \right) = L' C' \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Persamaan Gelombang 1D Standar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} \quad (\text{Kecepatan Rambat Gelombang})$$

Formulasi Solusi d'Alembert

Teorema d'Alembert

Solusi umum dari $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ adalah superposisi dari dua gelombang yang merambat berlawanan arah:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

- $f(x - ct)$: Gelombang datang (*forward traveling wave*) merambat ke arah $+x$.
- $g(x + ct)$: Gelombang pantul (*backward traveling wave*) merambat ke arah $-x$.

Formulasi Solusi d'Alembert

Teorema d'Alembert

Solusi umum dari $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ adalah superposisi dari dua gelombang yang merambat berlawanan arah:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

- $f(x - ct)$: Gelombang datang (*forward traveling wave*) merambat ke arah $+x$.
- $g(x + ct)$: Gelombang pantul (*backward traveling wave*) merambat ke arah $-x$.

Jika diberikan profil awal $u(x, 0) = \phi(x)$ dan kecepatan awal $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - ct) + \phi(x + ct)]$$

Ujung Hubung Singkat ($x = L$ Ground)

- Tegangan $v(L, t) = 0$ (Batas Dirichlet).
- Koefisien Refleksi: $\Gamma = -1$.
- Gelombang pantul berbalik polaritas (pergeseran fase 180°).

Kondisi Batas Saluran Transmisi

Ujung Hubung Singkat ($x = L$ Ground)

- Tegangan $v(L, t) = 0$ (Batas Dirichlet).
- Koefisien Refleksi: $\Gamma = -1$.
- Gelombang pantul berbalik polaritas (pergeseran fase 180°).

Ujung Terbuka ($x = L$ Open)

- Arus $i(L, t) = 0 \implies \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0$ (Batas Neumann).
- Koefisien Refleksi: $\Gamma = +1$.
- Gelombang pantul sefase (tegangan berlipat ganda).

Simulasi Julia: Perambatan Gelombang 1D

Metode FDTD (Finite Difference Time Domain)

$$u_i^{n+1} = 2(1 - r^2)u_i^n + r^2(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - u_i^{n-1}, \quad r = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

- Memvisualisasikan pemecahan pulsa Gauss menjadi 2 gelombang simetris d'Alembert.
- Menghasilkan diagram spatiotemporal *heatmap* 2D.

Kuis Interaktif 11

Soal: Saluran kabel koaksial memiliki $L' = 0.25 \mu\text{H/m}$ dan $C' = 100 \text{ pF/m}$. Berapakah kecepatan rambat sinyal dan waktu tempuh untuk kabel sepanjang 300 meter?

Soal: Saluran kabel koaksial memiliki $L' = 0.25 \mu\text{H}/\text{m}$ dan $C' = 100 \text{ pF}/\text{m}$. Berapakah kecepatan rambat sinyal dan waktu tempuh untuk kabel sepanjang 300 meter?

Jawaban:

$$\textcircled{1} \quad c = \frac{1}{\sqrt{0.25 \times 10^{-6} \times 100 \times 10^{-12}}} = \frac{1}{\sqrt{25 \times 10^{-18}}} = \frac{1}{5 \times 10^{-9}} = 2 \times 10^8 \text{ m/s} = \frac{2}{3}c \text{ (kecepatan cahaya).}$$

Soal: Saluran kabel koaksial memiliki $L' = 0.25 \mu\text{H}/\text{m}$ dan $C' = 100 \text{ pF}/\text{m}$. Berapakah kecepatan rambat sinyal dan waktu tempuh untuk kabel sepanjang 300 meter?

Jawaban:

- ① $c = \frac{1}{\sqrt{0.25 \times 10^{-6} \times 100 \times 10^{-12}}} = \frac{1}{\sqrt{25 \times 10^{-18}}} = \frac{1}{5 \times 10^{-9}} = 2 \times 10^8 \text{ m/s} = \frac{2}{3}c$ (kecepatan cahaya).
- ② Waktu tempuh: $t = \frac{300 \text{ m}}{2 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.5 \mu\text{s} = 1500 \text{ ns}$.

- 1 Gelombang tegangan dan arus pada saluran transmisi merupakan konsekuensi langsung dari hukum Maxwell.
- 2 Kecepatan rambat hanya bergantung pada karakteristik geometris dan material dielektrik (L' , C').
- 3 Analisis d'Alembert dan FDTD menjadi instrumen esensial dalam desain transmisi data berkecepatan tinggi.