

Persamaan Diferensial

Minggu 12: Persamaan Panas 1D & Manajemen Termal Konduktor Daya

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 4)

- **CPMK 4.1:** Memahami penurunan Hukum Konduksi Fourier pada konduktor kabel berarus.
- **CPMK 4.2:** Menyelesaikan PDP Panas 1D untuk kondisi batas homogen (*Dirichlet cooling*) dan terisolasi (*Neumann*).
- **CPMK 4.3:** Menganalisis dekomposisi suhu transien dan distribusi suhu keadaan mantap (*steady-state*).
- **CPMK 4.4:** Menerapkan skema beda hingga FTCS pada simulasi Julia (Simulasi Persamaan Panas 1D).

Daftar Isi

- 1 Pemodelan Termal Konduktor Listrik
- 2 Solusi Analitik Deret Fourier
- 3 Kondisi Batas Non-Homogen & Keadaan Mantap
- 4 Kuis & Simulasi Komputasi

Penurunan Persamaan Difusi Panas 1D

Berdasarkan Hukum Konduksi Kalor Fourier ($q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$) dan konservasi energi pada batang konduktor dengan difusivitas termal $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$:

Persamaan Panas 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- $u(x, t)$: Distribusi temperatur pada posisi x dan waktu t ($^{\circ}\text{C}$).
- α : Difusivitas termal material (m^2/s).

Penurunan Persamaan Difusi Panas 1D

Berdasarkan Hukum Konduksi Kalor Fourier ($q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$) dan konservasi energi pada batang konduktor dengan difusivitas termal $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$:

Persamaan Panas 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- $u(x, t)$: Distribusi temperatur pada posisi x dan waktu t ($^{\circ}\text{C}$).
- α : Difusivitas termal material (m^2/s).

Aplikasi Elektro: Perhitungan ampacity (kapasitas hantar arus) maksimum kabel bawah tanah dan disipasi panas transformator.

Penyelesaian dengan Syarat Batas Dirichlet

Untuk kabel panjang L dengan kedua ujung dijaga pada suhu lingkungan 0°C ($u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$) dan profil suhu awal $u(x, 0) = f(x)$:

Penyelesaian dengan Syarat Batas Dirichlet

Untuk kabel panjang L dengan kedua ujung dijaga pada suhu lingkungan 0°C ($u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$) dan profil suhu awal $u(x, 0) = f(x)$:

Solusi Lengkap

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 \alpha t}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

Penyelesaian dengan Syarat Batas Dirichlet

Untuk kabel panjang L dengan kedua ujung dijaga pada suhu lingkungan 0°C ($u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$) dan profil suhu awal $u(x, 0) = f(x)$:

Solusi Lengkap

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 \alpha t}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

Faktor Peluruhan Eksponensial:

$$\tau_n = \frac{1}{\alpha \lambda_n^2} = \frac{L^2}{n^2 \pi^2 \alpha}$$

Harmonik spasial frekuensi tinggi ($n = 2, 3, \dots$) meluruh jauh lebih cepat, menyisakan gelombang sinusoidal mulus mode fundamental ($n = 1$).

Transien vs Keadaan Mantap (*Steady-State*)

Jika kedua ujung kabel memiliki suhu konstan berbeda: $u(0, t) = T_1$ dan $u(L, t) = T_2$:

Transien vs Keadaan Mantap (*Steady-State*)

Jika kedua ujung kabel memiliki suhu konstan berbeda: $u(0, t) = T_1$ dan $u(L, t) = T_2$: Solusi total dipecah menjadi:

$$u(x, t) = u_{\text{steady}}(x) + u_{\text{transient}}(x, t)$$

Transien vs Keadaan Mantap (*Steady-State*)

Jika kedua ujung kabel memiliki suhu konstan berbeda: $u(0, t) = T_1$ dan $u(L, t) = T_2$: Solusi total dipecah menjadi:

$$u(x, t) = u_{\text{steady}}(x) + u_{\text{transient}}(x, t)$$

Distribusi Suhu Keadaan Mantap (Saat $t \rightarrow \infty$)

$$\frac{d^2 u_{\text{steady}}}{dx^2} = 0 \implies u_{\text{steady}}(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \quad (\text{Garis Lurus Linear})$$

Simulasi Persamaan Panas 1D

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.5$$

- Mempelajari syarat stabilitas von Neumann ($r \leq 0.5$).
- Visualisasi difusi titik panas (*hot-spot*) kabel daya.

Soal: Jika panjang kabel tembaga diduplikasi menjadi $2\times$ lipat semula ($L' = 2L$), berapakah peningkatan waktu pendinginan τ yang dibutuhkan kabel hingga mencapai suhu dingin?

Kuis Interaktif 12

Soal: Jika panjang kabel tembaga diduplikasi menjadi $2\times$ lipat semula ($L' = 2L$), berapakah peningkatan waktu pendinginan τ yang dibutuhkan kabel hingga mencapai suhu dingin?

Jawaban:

Karena konstanta waktu peluruhan $\tau \propto L^2$:

$$\tau' \propto (2L)^2 = 4L^2 = 4\tau$$

Waktu pendinginan meningkat **4 kali lipat!**

- 1 Persamaan panas adalah PDP tipe parabolik yang memodelkan proses disipasi irreversibel.
- 2 Solusi selalu konvergen menuju gradien temperatur linear pada keadaan mantap.
- 3 Kestabilan numerik FTCS menuntut langkah waktu $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$.