

Persamaan Diferensial

Minggu 13: Persamaan Laplace 2D & Analisis Potensial Elektrostatik

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 4)

- **CPMK 4.1:** Menurunkan Persamaan Laplace 2D dari Hukum Gauss elektrostatik ($\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$) dan hubungan medan potensial ($\mathbf{E} = -\nabla V$).
- **CPMK 4.2:** Memahami sifat fungsi harmonik: Sifat Nilai Rata-rata (*Mean-Value Property*) dan Prinsip Ekstremum Maksimum/Minimum.
- **CPMK 4.3:** Menyelesaikan Persamaan Laplace 2D pada domain persegi/persegi panjang menggunakan deret Fourier analitik.
- **CPMK 4.4:** Menerapkan metode relaksasi beda hingga (Gauss-Seidel) pada simulasi Julia (Simulasi Potensial Laplace 2D).

Daftar Isi

- 1 Penurunan Persamaan Laplace & Poisson
- 2 Sifat Fungsi Harmonik
- 3 Solusi Analitik Deret 2D
- 4 Simulasi Julia & Kuis

Dari Hukum Gauss ke Persamaan Laplace

Hukum Medan Elektrostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

Dari Hukum Gauss ke Persamaan Laplace

Hukum Medan Elektrostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

Substitusi medan listrik $\mathbf{E}$ ke Hukum Gauss:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho_v}{\epsilon} \implies \nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (\text{Persamaan Poisson})$$

Dari Hukum Gauss ke Persamaan Laplace

Hukum Medan Elektrostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

Substitusi medan listrik $\mathbf{E}$ ke Hukum Gauss:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho_v}{\epsilon} \implies \nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (\text{Persamaan Poisson})$$

Persamaan Laplace 2D (Ruang Bebas Muatan $\rho_v = 0$)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Keunikan Solusi Laplace (Fungsi Harmonik)

Sifat Nilai Rata-rata

Potensial pada titik manapun (x, y) selalu sama dengan nilai rata-rata potensial pada lingkaran/kotak di sekelilingnya:

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(R, \theta) d\theta$$

Keunikan Solusi Laplace (Fungsi Harmonik)

Sifat Nilai Rata-rata

Potensial pada titik manapun (x, y) selalu sama dengan nilai rata-rata potensial pada lingkaran/kotak di sekelilingnya:

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(R, \theta) d\theta$$

Prinsip Maksimum-Minimum

Fungsi harmonik tidak pernah memiliki nilai maksimum lokal atau minimum lokal di dalam domain terbuka! Nilai ekstrem hanya terjadi pada batas konduktor (*boundaries*).

Distribusi Potensial dalam Konduktor Persegi Panjang

Domain $0 \leq x \leq a$ dan $0 \leq y \leq b$ dengan batas:

$$V(0, y) = 0, \quad V(a, y) = 0, \quad V(x, 0) = 0, \quad V(x, b) = V_0.$$

Distribusi Potensial dalam Konduktor Persegi Panjang

Domain $0 \leq x \leq a$ dan $0 \leq y \leq b$ dengan batas:

$V(0, y) = 0$, $V(a, y) = 0$, $V(x, 0) = 0$, $V(x, b) = V_0$. Menggunakan pemisahan variabel

$V(x, y) = X(x)Y(y)$:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad Y_n(y) = \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Distribusi Potensial dalam Konduktor Persegi Panjang

Domain $0 \leq x \leq a$ dan $0 \leq y \leq b$ dengan batas:

$V(0, y) = 0$, $V(a, y) = 0$, $V(x, 0) = 0$, $V(x, b) = V_0$. Menggunakan pemisahan variabel $V(x, y) = X(x)Y(y)$:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad Y_n(y) = \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Solusi Deret Fourier 2D

$$V(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Algoritma Beda Hingga 4-Titik

$$V_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left(V_{i+1,j}^{(k)} + V_{i-1,j}^{(k)} + V_{i,j+1}^{(k)} + V_{i,j-1}^{(k)} \right)$$

- Menghasilkan garis ekipotensial kontur 2D.
- Memvisualisasikan permukaan potensial 3D (*Potential Wells*).

Kuis Interaktif 13

Soal: Jika seluruh batas konduktor luar sebuah rongga kotak tertutup dihubungkan ke tanah ($V = 0$ V), berapa nilai potensial elektrostatik V persis di tengah-tengah rongga tersebut?

Kuis Interaktif 13

Soal: Jika seluruh batas konduktor luar sebuah rongga kotak tertutup dihubungkan ke tanah ($V = 0$ V), berapa nilai potensial elektrostatik V persis di tengah-tengah rongga tersebut?

Jawaban:

Berdasarkan ****Teorema Keunikan (*Uniqueness Theorem*)**** dan ****Prinsip Ekstremum****: Karena nilai batas di semua sisi adalah 0 V, maka nilai maksimum dan minimum keduanya adalah 0 V. Maka nilai potensial di seluruh titik di dalam rongga adalah:

$$V(x, y) = 0 \text{ Volt}$$

- 1 Persamaan Laplace adalah persamaan eliptik dasar untuk medan elektrostatik, magnetostatik, dan aliran panas steady-state.
- 2 Fungsi solusi selalu bersifat halus (*smooth*) dan memenuhi sifat nilai rata-rata.
- 3 Metode relaksasi Gauss-Seidel merupakan algoritma komputasi paling intuitif untuk menyelesaikan masalah elektrostatik 2D.