

Persamaan Diferensial

Minggu 14: Fungsi Khusus — Persamaan Bessel & Aplikasi Gelombang Silinder

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 4)

- **CPMK 4.1:** Memahami transformasi persamaan diferensial dari koordinat Kartesius (x, y) ke koordinat Silinder (r, θ, z) .
- **CPMK 4.2:** Menyusun bentuk standar Persamaan Diferensial Bessel dan mengenali solusi fungsi Bessel Jenis Pertama $J_\nu(x)$ dan Jenis Kedua $Y_\nu(x)$.
- **CPMK 4.3:** Memahami perilaku nilai nol (*zeros*) dari fungsi Bessel untuk penentuan frekuensi resonansi rongga silinder.
- **CPMK 4.4:** Menganalisis fenomena Efek Kulit (*Skin Effect*) dan distribusi medan pada kabel koaksial serta pandu gelombang (*waveguide*).

Daftar Isi

- 1 Asal Mula Persamaan Bessel dalam Koordinat Silinder
- 2 Solusi: Fungsi Bessel $J_\nu(x)$ & $Y_\nu(x)$
- 3 Aplikasi Elektro: Efek Kulit & Pandu Gelombang
- 4 Kuis & Rangkuman

Laplacian dalam Koordinat Silinder

Pada sistem berpenampang melingkar (kabel tembaga silinder, serat optik, *cavity resonator*):

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Laplacian dalam Koordinat Silinder

Pada sistem berpenampang melingkar (kabel tembaga silinder, serat optik, *cavity resonator*):

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Dengan pemisahan variabel radial $R(r)$, diperoleh:

Bentuk Standar Persamaan Diferensial Bessel Orde ν

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

dengan parameter $\nu \geq 0$ (orde Bessel).

Fungsi Bessel Jenis Pertama & Kedua

Fungsi Bessel Jenis 1: $J_\nu(x)$

- Berhingga di titik pusat $x = 0$
($J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ untuk $n \geq 1$).
- Memodelkan medan elektromagnetik di dalam silinder pejal.

Fungsi Bessel Jenis Pertama & Kedua

Fungsi Bessel Jenis 1: $J_\nu(x)$

- Berhingga di titik pusat $x = 0$ ($J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ untuk $n \geq 1$).
- Memodelkan medan elektromagnetik di dalam silinder pejal.

Fungsi Bessel Jenis 2: $Y_\nu(x)$ (Neumann)

- Menuju $-\infty$ saat $x \rightarrow 0$ (singular di pusat).
- Dipakai untuk wilayah cincin/anulus (misal antara konduktor dalam dan luar kabel koaksial).

Fungsi Bessel Jenis Pertama & Kedua

Fungsi Bessel Jenis 1: $J_\nu(x)$

- Berhingga di titik pusat $x = 0$ ($J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ untuk $n \geq 1$).
- Memodelkan medan elektromagnetik di dalam silinder pejal.

Fungsi Bessel Jenis 2: $Y_\nu(x)$ (Neumann)

- Menuju $-\infty$ saat $x \rightarrow 0$ (singular di pusat).
- Dipakai untuk wilayah cincin/anulus (misal antara konduktor dalam dan luar kabel koaksial).

Solusi Umum Persamaan Bessel

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

Aplikasi 1: Fenomena Efek Kulit (*Skin Effect*)

Distribusi Rapat Arus Frekuensi Tinggi

Pada frekuensi tinggi ($f \geq 50$ Hz AC), arus listrik terdesak ke permukaan luar konduktor:

$$J_z(r) = J_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}, \quad k = \frac{1-j}{\delta}$$

dengan kedalaman kulit (*skin depth*) $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}}$.

Aplikasi 1: Fenomena Efek Kulit (*Skin Effect*)

Distribusi Rapat Arus Frekuensi Tinggi

Pada frekuensi tinggi ($f \geq 50$ Hz AC), arus listrik terdesak ke permukaan luar konduktor:

$$J_z(r) = J_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}, \quad k = \frac{1-j}{\delta}$$

dengan kedalaman kulit (*skin depth*) $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}}$.

*Dampak Rekayasa: Menjelaskan mengapa saluran transmisi tegangan ekstra tinggi (SUTET) menggunakan kabel konduktor berongga atau berkas (*bundled conductor*).*

Soal: Mengapa pada analisis kabel silinder tembaga pejal, konstanta C_2 pada suku $Y_\nu(x)$ harus selalu bernilai nol ($C_2 = 0$)?

Soal: Mengapa pada analisis kabel silinder tembaga pejal, konstanta C_2 pada suku $Y_\nu(x)$ harus selalu bernilai nol ($C_2 = 0$)?

Jawaban:

Karena di titik pusat kabel ($r = 0$), nilai fungsi Bessel jenis kedua $Y_\nu(0) \rightarrow -\infty$. Secara fisik, rapat arus atau medan listrik di sumbu kabel tidak mungkin bernilai minus tak hingga (harus bernilai terhingga dan riil). Maka suku Y_ν harus dihilangkan dengan memilih $C_2 = 0$.

Rangkuman Materi Minggu 14

- ① Koordinat silinder secara alami memunculkan PDB Bessel untuk bagian radial.
- ② $J_\nu(x)$ berosilasi mirip fungsi kosinus/sinus tetapi amplitudonya meluruh seiring $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
- ③ Fungsi Bessel adalah pilar komputasi elektromagnetika pada pandu gelombang silinder dan serat optik.