

Persamaan Diferensial

Minggu 2: PDB Orde 1 (Separabel, Eksak, Faktor Integrasi)

Novalio Daratha & Muhammad Arfan
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Outline Pembelajaran

- 1 Bentuk Umum PDB Orde 1
- 2 Persamaan Separabel
- 3 Persamaan Eksak
- 4 Faktor Integrasi

Bentuk Umum PDB Orde 1

Secara umum, Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Orde 1 dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{atau} \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

Metode penyelesaiannya bergantung pada karakteristik fungsi penyusunnya. Hari ini kita akan membahas tiga metode utama:

- **Persamaan Separabel** (Dapat Dipisahkan)
- **Persamaan Eksak**
- **Persamaan Non-Eksak dengan Faktor Integrasi**

Persamaan Separabel (Dapat Dipisahkan)

Definisi

PDB disebut separabel jika fungsi $f(x, y)$ dapat difaktorkan menjadi fungsi yang murni bergantung pada x dan fungsi yang murni bergantung pada y .

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Langkah Penyelesaian:

- 1 Kumpulkan semua suku ber-variabel y ke ruas yang bersandingan dengan dy .
- 2 Kumpulkan semua suku ber-variabel x ke ruas yang bersandingan dengan dx .
- 3 Integrasikan kedua ruas secara independen.

Bentuk Integrasi

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + C$$

Contoh Soal: Persamaan Separabel

Selesaikan PDB berikut: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Penyelesaian Langkah-demi-Langkah:

① Pisahkan Variabel:

Contoh Soal: Persamaan Separabel

Selesaikan PDB berikut: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Penyelesaian Langkah-demi-Langkah:

① Pisahkan Variabel:

$$\frac{dy}{y^2} = -2x dx$$

Contoh Soal: Persamaan Separabel

Selesaikan PDB berikut: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Penyelesaian Langkah-demi-Langkah:

① Pisahkan Variabel:

$$\frac{dy}{y^2} = -2x dx$$

② Integrasikan Kedua Ruas:

Contoh Soal: Persamaan Separabel

Selesaikan PDB berikut: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Penyelesaian Langkah-demi-Langkah:

① Pisahkan Variabel:

$$\frac{dy}{y^2} = -2x dx$$

② Integrasikan Kedua Ruas:

$$\int y^{-2} dy = \int -2x dx$$

Contoh Soal: Persamaan Separabel

Selesaikan PDB berikut: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Penyelesaian Langkah-demi-Langkah:

① Pisahkan Variabel:

$$\frac{dy}{y^2} = -2x dx$$

② Integrasikan Kedua Ruas:

$$\int y^{-2} dy = \int -2x dx$$

③ Hasil Integrasi:

Contoh Soal: Persamaan Separabel

Selesaikan PDB berikut: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Penyelesaian Langkah-demi-Langkah:

① Pisahkan Variabel:

$$\frac{dy}{y^2} = -2x dx$$

② Integrasikan Kedua Ruas:

$$\int y^{-2} dy = \int -2x dx$$

③ Hasil Integrasi:

$$-y^{-1} = -x^2 + C$$

Contoh Soal: Persamaan Separabel

Selesaikan PDB berikut: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Penyelesaian Langkah-demi-Langkah:

① Pisahkan Variabel:

$$\frac{dy}{y^2} = -2x dx$$

② Integrasikan Kedua Ruas:

$$\int y^{-2} dy = \int -2x dx$$

③ Hasil Integrasi:

$$-y^{-1} = -x^2 + C$$

④ Bentuk Solusi Umum Eksplisit (y):

Contoh Soal: Persamaan Separabel

Selesaikan PDB berikut: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

Penyelesaian Langkah-demi-Langkah:

① Pisahkan Variabel:

$$\frac{dy}{y^2} = -2x dx$$

② Integrasikan Kedua Ruas:

$$\int y^{-2} dy = \int -2x dx$$

③ Hasil Integrasi:

$$-y^{-1} = -x^2 + C$$

④ Bentuk Solusi Umum Eksplisit (y):

$$\frac{1}{y} = x^2 - C \implies y(x) = \frac{1}{x^2 + K}$$

(di mana $K = -C$ adalah konstanta integrasi baru)

Persamaan Eksak

Bentuk $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ dikatakan **Eksak** jika memenuhi syarat turunan parsial silang:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

Konsep Fisis (Medan Konservatif):

Persamaan eksak ekuivalen dengan total diferensial dari suatu fungsi skalar (seperti fungsi potensial tegangan) $F(x, y) = C$, di mana:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

Artinya $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ dan $N = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ Uji Ke-Eksak-an:

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{EKSAK!}$$

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{EKSAK!}$$

❷ **Cari Fungsi $F(x, y)$ dari $\int Mdx$:**

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{EKSAK!}$$

❷ **Cari Fungsi $F(x, y)$ dari $\int Mdx$:**

$$F(x, y) = \int 2xy dx = x^2y + g(y)$$

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{EKSAK!}$$

❷ **Cari Fungsi $F(x, y)$ dari $\int Mdx$:**

$$F(x, y) = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

❸ **Turunkan F terhadap y dan samakan dengan N :**

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{EKSAK!}$$

❷ **Cari Fungsi $F(x, y)$ dari $\int Mdx$:**

$$F(x, y) = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

❸ **Turunkan F terhadap y dan samakan dengan N :**

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{EKSAK!}$$

❷ **Cari Fungsi $F(x, y)$ dari $\int Mdx$:**

$$F(x, y) = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

❸ **Turunkan F terhadap y dan samakan dengan N :**

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

$$x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \implies g'(y) = -1 \implies g(y) = -y$$

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{EKSAK!}$$

❷ **Cari Fungsi $F(x, y)$ dari $\int Mdx$:**

$$F(x, y) = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

❸ **Turunkan F terhadap y dan samakan dengan N :**

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

$$x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \implies g'(y) = -1 \implies g(y) = -y$$

❹ **Solusi Umum $F(x, y) = C$:**

Contoh Soal: Persamaan Eksak

Selesaikan: $(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

❶ **Uji Ke-Eksak-an:**

$$M = 2xy \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N = x^2 - 1 \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{EKSAK!}$$

❷ **Cari Fungsi $F(x, y)$ dari $\int Mdx$:**

$$F(x, y) = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

❸ **Turunkan F terhadap y dan samakan dengan N :**

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

$$x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \implies g'(y) = -1 \implies g(y) = -y$$

❹ **Solusi Umum $F(x, y) = C$:**

$$x^2y - y = C$$

Faktor Integrasi

Bagaimana jika $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$?

Persamaan tersebut **Non-Eksak**. Namun, kita bisa menjadikannya eksak dengan mengalikannya dengan suatu *Faktor Integrasi* $\mu(x, y)$.

Kasus Sederhana (Hanya Fungsi 1 Variabel)

- Jika $\frac{M_y - N_x}{N}$ hanya fungsi dari x (sebut $p(x)$), maka $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.
- Jika $\frac{N_x - M_y}{M}$ hanya fungsi dari y (sebut $q(y)$), maka $\mu(y) = e^{\int q(y)dy}$.

Faktor Integrasi

Bagaimana jika $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$?

Persamaan tersebut **Non-Eksak**. Namun, kita bisa menjadikannya eksak dengan mengalikannya dengan suatu *Faktor Integrasi* $\mu(x, y)$.

Kasus Sederhana (Hanya Fungsi 1 Variabel)

- Jika $\frac{M_y - N_x}{N}$ hanya fungsi dari x (sebut $p(x)$), maka $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.
- Jika $\frac{N_x - M_y}{M}$ hanya fungsi dari y (sebut $q(y)$), maka $\mu(y) = e^{\int q(y)dy}$.

Setelah dikalikan dengan faktor ini, persamaan $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ akan **dijamin menjadi eksak** dan dapat diselesaikan dengan cara sebelumnya.

Kuis Interaktif: Pencarian Faktor Integrasi

Tinjau persamaan: $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

1. Cek Eksak:

$$M_y = 3x + 2y$$

$$N_x = 2x + y$$

Tidak sama, jadi **Non-Eksak**.

Kuis Interaktif: Pencarian Faktor Integrasi

Tinjau persamaan: $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

1. Cek Eksak:

$$M_y = 3x + 2y$$

$$N_x = 2x + y$$

Tidak sama, jadi **Non-Eksak**.

2. Mari kita coba cari $p(x)$:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(3x + 2y) - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

Kuis Interaktif: Pencarian Faktor Integrasi

Tinjau persamaan: $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

1. Cek Eksak:

$$M_y = 3x + 2y$$

$$N_x = 2x + y$$

Tidak sama, jadi **Non-Eksak**.

2. Mari kita coba cari $p(x)$:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(3x + 2y) - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

3. Apa Faktor Integrasinya $\mu(x)$?

Kuis Interaktif: Pencarian Faktor Integrasi

Tinjau persamaan: $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

1. Cek Eksak:

$$M_y = 3x + 2y$$

$$N_x = 2x + y$$

Tidak sama, jadi **Non-Eksak**.

2. Mari kita coba cari $p(x)$:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(3x + 2y) - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

3. Apa Faktor Integrasinya $\mu(x)$?

Jawaban:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

Jika seluruh persamaan dikali x , maka persamaan tersebut akan menjadi eksak!

Terima Kasih

Latihan Soal & Sesi Diskusi

Novalio Daratha & Muhammad Arfan
Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu