

Persamaan Diferensial

Minggu 3: Aplikasi PDB Orde 1 dalam Rekayasa Elektro (Transien RC, RL, & Termal)

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran Perkuliahan (CPMK 2)

- **CPMK 2.1:** Mahasiswa mampu menyusun pemodelan fisis rangkaian elektrik orde 1 menggunakan Hukum Kirchhoff (KVL/KCL).
- **CPMK 2.2:** Mahasiswa mampu menyelesaikan PDB orde 1 untuk respons transien dan kondisi mantap (*steady-state*).
- **CPMK 2.3:** Mahasiswa memahami makna fisis dari konstanta waktu (*time constant* τ) pada pengisian/pengosongan energi.
- **CPMK 2.4:** Mahasiswa mampu memverifikasi hasil analitik dengan simulasi numerik berbasis bahasa Julia.

Daftar Isi Materi Minggu 3

- 1 Pemodelan Fisis Rangkaian RL Seri
- 2 Pemodelan Fisis Rangkaian RC Seri
- 3 Aplikasi Termal: Hukum Pendinginan Newton
- 4 Uji Konsep & Kuis Interaktif

Rangkaian RL Seri: Pengisian Arus Induktor

Persamaan KVL

Berdasarkan Hukum Tegangan Kirchhoff:

$$V_R(t) + V_L(t) = V_0$$

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_0$$

Rangkaian RL Seri: Pengisian Arus Induktor

Persamaan KVL

Berdasarkan Hukum Tegangan Kirchhoff:

$$V_R(t) + V_L(t) = V_0$$

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_0$$

Bentuk standar PDB linear:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L}$$

Karakteristik Fisik

- Induktor menentang perubahan arus tiba-tiba: $i(0^-) = i(0^+) = 0$.
- Konstanta waktu: $\tau = \frac{L}{R}$ (detik).
- Arus akhir saat mantap ($t \rightarrow \infty$): $I_{\text{maks}} = \frac{V_0}{R}$.

Penurunan Solusi Analitik Arus Induktor

Menggunakan faktor integrasi $\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L} t}$:

Penurunan Solusi Analitik Arus Induktor

Menggunakan faktor integrasi $\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L}t}$:

$$e^{\frac{R}{L}t} \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} i = \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \implies \frac{d}{dt} \left(i \cdot e^{\frac{R}{L}t} \right) = \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

Penurunan Solusi Analitik Arus Induktor

Menggunakan faktor integrasi $\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L}t}$:

$$e^{\frac{R}{L}t} \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} i = \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \implies \frac{d}{dt} (i \cdot e^{\frac{R}{L}t}) = \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

Integralkan kedua ruas terhadap t :

$$i(t) \cdot e^{\frac{R}{L}t} = \int \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{V_0}{L} \left(\frac{L}{R} \right) e^{\frac{R}{L}t} + C = \frac{V_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C$$

Penurunan Solusi Analitik Arus Induktor

Menggunakan faktor integrasi $\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L}t}$:

$$e^{\frac{R}{L}t} \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} i = \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \implies \frac{d}{dt} (i \cdot e^{\frac{R}{L}t}) = \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

Integrasikan kedua ruas terhadap t :

$$i(t) \cdot e^{\frac{R}{L}t} = \int \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{V_0}{L} \left(\frac{L}{R} \right) e^{\frac{R}{L}t} + C = \frac{V_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C$$

Solusi Umum & Solusi Khusus IVP ($i(0) = 0$)

$$i(t) = \frac{V_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t} \implies 0 = \frac{V_0}{R} + C \implies C = -\frac{V_0}{R}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Rangkaian RC Seri: Pengisian Muatan & Tegangan

Persamaan Diferensial

$$V_R(t) + V_C(t) = V_0$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \implies RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_0$$

Rangkaian RC Seri: Pengisian Muatan & Tegangan

Persamaan Diferensial

$$V_R(t) + V_C(t) = V_0$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \implies RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_0$$

Konstanta waktu kapasitor:

$$\tau = R \cdot C \quad (\text{detik})$$

Rangkaian RC Seri: Pengisian Muatan & Tegangan

Persamaan Diferensial

$$V_R(t) + V_C(t) = V_0$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \implies RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_0$$

Konstanta waktu kapasitor:

$$\tau = R \cdot C \quad (\text{detik})$$

Solusi Pengisian ($V_C(0) = 0$)

$$V_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$i(t) = C \frac{dV_C}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Tegangan naik mulus, arus melonjak maksimum lalu meluruh.

Pengosongan Kapasitor (Discharging Transient)

Bila kapasitor yang telah terisi penuh V_0 dihubungkan singkat melalui resistor R ($V_{\text{sumber}} = 0$):

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \implies \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{1}{RC} dt$$

Pengosongan Kapasitor (Discharging Transient)

Bila kapasitor yang telah terisi penuh V_0 dihubungkan singkat melalui resistor R ($V_{\text{sumber}} = 0$):

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \implies \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{1}{RC} dt$$

Integrasikan dengan kondisi awal $V_C(0) = V_0$:

Respons Pelepasan Energi

$$\ln \left(\frac{V_C(t)}{V_0} \right) = -\frac{t}{RC} \implies V_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

Pengosongan Kapasitor (Discharging Transient)

Bila kapasitor yang telah terisi penuh V_0 dihubungkan singkat melalui resistor R ($V_{\text{sumber}} = 0$):

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \implies \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{1}{RC} dt$$

Integrasikan dengan kondisi awal $V_C(0) = V_0$:

Respons Pelepasan Energi

$$\ln \left(\frac{V_C(t)}{V_0} \right) = -\frac{t}{RC} \implies V_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

- Saat $t = 1\tau$: $V_C(t) = V_0 e^{-1} \approx 0.368 V_0$ (Tersisa 36.8%).
- Saat $t = 5\tau$: $V_C(t) = V_0 e^{-5} \approx 0.0067 V_0$ (Sistem dianggap mencapai *steady-state* $< 1\%$).

Hukum Pendinginan Newton pada Trafo / Motor Listrik

Persamaan Laju Pelepasan Kalor

Laju perubahan suhu $T(t)$ konduktor terhadap suhu sekitar T_a :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Hukum Pendinginan Newton pada Trafo / Motor Listrik

Persamaan Laju Pelepasan Kalor

Laju perubahan suhu $T(t)$ konduktor terhadap suhu sekitar T_a :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Penyelesaian menggunakan separasi variabel:

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = -k \int dt \implies \ln |T - T_a| = -kt + C_1$$

Hukum Pendinginan Newton pada Trafo / Motor Listrik

Persamaan Laju Pelepasan Kalor

Laju perubahan suhu $T(t)$ konduktor terhadap suhu sekitar T_a :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Penyelesaian menggunakan separasi variabel:

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = -k \int dt \implies \ln |T - T_a| = -kt + C_1$$

Solusi Suhu Motor/Kabel Terhadap Waktu

Jika suhu awal konduktor adalah $T(0) = T_0$:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Kuis Interaktif 1: Konstanta Waktu Rangkaian

Pertanyaan: Sebuah rangkaian pengapian mobil menggunakan induktor $L = 500 \text{ mH}$ dan resistor $R = 25 \Omega$. Berapakah konstanta waktu τ dan berapa waktu yang diperlukan arus untuk mencapai 99% dari nilai maksimumnya?

Kuis Interaktif 1: Konstanta Waktu Rangkaian

Pertanyaan: Sebuah rangkaian pengapian mobil menggunakan induktor $L = 500 \text{ mH}$ dan resistor $R = 25 \Omega$. Berapakah konstanta waktu τ dan berapa waktu yang diperlukan arus untuk mencapai 99% dari nilai maksimumnya?

Pembahasan:

$$\textcircled{1} \tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5 \text{ H}}{25 \Omega} = 0.02 \text{ detik} = 20 \text{ ms.}$$

Kuis Interaktif 1: Konstanta Waktu Rangkaian

Pertanyaan: Sebuah rangkaian pengapian mobil menggunakan induktor $L = 500 \text{ mH}$ dan resistor $R = 25 \Omega$. Berapakah konstanta waktu τ dan berapa waktu yang diperlukan arus untuk mencapai 99% dari nilai maksimumnya?

Pembahasan:

- ① $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5 \text{ H}}{25 \Omega} = 0.02 \text{ detik} = 20 \text{ ms.}$
- ② Arus mencapai 99% saat: $1 - e^{-t/\tau} = 0.99 \implies e^{-t/\tau} = 0.01.$

Kuis Interaktif 1: Konstanta Waktu Rangkaian

Pertanyaan: Sebuah rangkaian pengapian mobil menggunakan induktor $L = 500 \text{ mH}$ dan resistor $R = 25 \Omega$. Berapakah konstanta waktu τ dan berapa waktu yang diperlukan arus untuk mencapai 99% dari nilai maksimumnya?

Pembahasan:

- ① $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5 \text{ H}}{25 \Omega} = 0.02 \text{ detik} = 20 \text{ ms}.$
- ② Arus mencapai 99% saat: $1 - e^{-t/\tau} = 0.99 \implies e^{-t/\tau} = 0.01.$
- ③ $t = -\tau \ln(0.01) \approx 4.605 \times 20 \text{ ms} \approx 92.1 \text{ ms} \approx 5\tau.$

Jupyter Notebook Minggu 3: Simulasi Transien RC & RL

- Mempelajari algoritma **Metode Euler** secara langsung:

$$i_{k+1} = i_k + \Delta t \cdot \left(\frac{V_0 - Ri_k}{L} \right)$$

- Membandingkan galat (*truncation error*) antara solusi numerik dan analitik eksak.
- Menjalankan pustaka industri **DifferentialEquations.jl** (SciML).

Ringkasan & Kesimpulan

- 1 Rangkaian RL dan RC dimodelkan oleh PDB linear orde 1 dengan konstanta waktu $\tau = L/R$ atau $\tau = RC$.
- 2 Respons total selalu terdiri atas **respons alami (transien)** yang meluruh dan **respons paksa (keadaan mantap)**.
- 3 Mahasiswa wajib memverifikasi perhitungan matematis menggunakan simulasi Julia pada Lembar Kerja Mandiri.