

Persamaan Diferensial

Minggu 4: PDB Linier Orde 2 Homogen Koefisien Konstan

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 2 / Sub-CPMK 4)

- **CPMK 2.1:** Memahami bentuk standar PDB linear orde 2 homogen dengan koefisien konstan.
- **CPMK 2.2:** Menguji kebebasan linier pasangan solusi menggunakan determinan Wronskian.
- **CPMK 2.3:** Menurunkan dan menyelesaikan persamaan karakteristik untuk 3 kasus diskriminan ($D > 0$, $D = 0$, $D < 0$).
- **CPMK 2.4:** Memahami metode reduksi orde yang menghasilkan faktor pengali x pada akar kembar.
- **CPMK 2.5:** Menyelesaikan Masalah Nilai Awal (IVP) orde 2 dan menganalisis dinamika rangkaian osilator LC murni.

Daftar Isi

- 1 Bentuk Standar & Prinsip Superposisi
- 2 Persamaan Karakteristik
- 3 Tiga Kasus Akar Karakteristik
- 4 Aplikasi Fisik: Rangkaian Osilator LC Murni
- 5 Kuis Interaktif

Bentuk Standar PDB Orde 2 Homogen

Definisi Persamaan Diferensial

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ay'' + by' + cy = 0$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ adalah konstanta riil dan $a \neq 0$.

Bentuk Standar PDB Orde 2 Homogen

Definisi Persamaan Diferensial

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ay'' + by' + cy = 0$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ adalah konstanta riil dan $a \neq 0$.

Prinsip Superposisi Linier

Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah dua solusi yang bebas linier, maka sembarang kombinasi linier:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

adalah **Solusi Umum** dari persamaan homogen untuk sembarang konstanta C_1, C_2 .

Bentuk Standar PDB Orde 2 Homogen

Definisi Persamaan Diferensial

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ay'' + by' + cy = 0$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ adalah konstanta riil dan $a \neq 0$.

Prinsip Superposisi Linier

Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah dua solusi yang bebas linier, maka sembarang kombinasi linier:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

adalah **Solusi Umum** dari persamaan homogen untuk sembarang konstanta C_1, C_2 .

Mengapa harus bebas linier? Agar kita memiliki 2 derajat kebebasan untuk memenuhi 2 kondisi awal ($y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = y'_0$).

Uji Kebebasan Linier: Determinan Wronskian

Definisi Determinan Wronskian

Untuk menguji apakah $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ saling bebas linier, didefinisikan determinan Wronskian:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Uji Kebebasan Linier: Determinan Wronskian

Definisi Determinan Wronskian

Untuk menguji apakah $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ saling bebas linier, didefinisikan determinan Wronskian:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Teorema Wronskian

- Jika $W(y_1, y_2) \neq 0$, maka y_1 dan y_2 adalah **Bebas Linier** dan membentuk himpunan solusi fundamental.
- Jika $W(y_1, y_2) = 0$, maka y_1 dan y_2 bergantung linier ($y_1 = ky_2$), sehingga tidak dapat membentuk solusi umum.

Penurunan Persamaan Karakteristik

Strategi Solusi Eksponensial: Kita menguji solusi berbentuk $y = e^{rx}$. Maka turunannya adalah:

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

Penurunan Persamaan Karakteristik

Strategi Solusi Eksponensial: Kita menguji solusi berbentuk $y = e^{rx}$. Maka turunannya adalah:

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

Substitusikan ke dalam PDB $ay'' + by' + cy = 0$:

$$a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) = 0 \implies e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Penurunan Persamaan Karakteristik

Strategi Solusi Eksponensial: Kita menguji solusi berbentuk $y = e^{rx}$. Maka turunannya adalah:

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

Substitusikan ke dalam PDB $ay'' + by' + cy = 0$:

$$a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) = 0 \implies e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Karena $e^{rx} \neq 0$ untuk semua x , maka syarat mutlaknya adalah:

Persamaan Karakteristik (Polinomial Pembantu)

$$ar^2 + br + c = 0$$

Akar-akar kuadrat: $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Klasifikasi Berdasarkan Diskriminan $D = b^2 - 4ac$

Diskriminan	Jenis Akar	Bentuk Solusi Umum	Rezim Fisis
$D > 0$	Real Berbeda ($r_1 \neq r_2$)	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$	<i>Overdamped</i>
$D = 0$	Real Kembar ($r_1 = r_2 = r$)	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$	<i>Critically Damped</i>
$D < 0$	Kompleks ($\alpha \pm j\beta$)	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$	<i>Underdamped</i>

Klasifikasi Berdasarkan Diskriminan $D = b^2 - 4ac$

Diskriminan	Jenis Akar	Bentuk Solusi Umum	Rezim Fisis
$D > 0$	Real Berbeda ($r_1 \neq r_2$)	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$	<i>Overdamped</i>
$D = 0$	Real Kembar ($r_1 = r_2 = r$)	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$	<i>Critically Damped</i>
$D < 0$	Kompleks ($\alpha \pm j\beta$)	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$	<i>Underdamped</i>

Perilaku transien sistem sepenuhnya ditentukan oleh posisi akar r pada bidang kompleks!

Kasus 1: Diskriminan Positif ($D > 0$)

Dua akar real berbeda: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dengan $r_1 \neq r_2$.

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Kasus 1: Diskriminan Positif ($D > 0$)

Dua akar real berbeda: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dengan $r_1 \neq r_2$.

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Uji Wronskian:

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = e^{r_1 x}(r_2 e^{r_2 x}) - (r_1 e^{r_1 x})e^{r_2 x} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$$

Kasus 1: Diskriminan Positif ($D > 0$)

Dua akar real berbeda: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dengan $r_1 \neq r_2$.

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Uji Wronskian:

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = e^{r_1 x}(r_2 e^{r_2 x}) - (r_1 e^{r_1 x})e^{r_2 x} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$$

Contoh Soal (IVP): $y'' - 5y' + 6y = 0$, dengan $y(0) = 4, y'(0) = 9$.

- ❶ Karakteristik: $r^2 - 5r + 6 = 0 \implies r_1 = 2, r_2 = 3$.
- ❷ Solusi umum: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \implies y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$.
- ❸ $y(0) = C_1 + C_2 = 4$ dan $y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 9$.
- ❹ Diperoleh: $C_1 = 3, C_2 = 1 \implies y(x) = 3e^{2x} + e^{3x}$.

Kasus 2: Diskriminan Nol ($D = 0$)

Akar kembar: $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$. Solusi pertama: $y_1 = e^{rx}$.

Kasus 2: Diskriminan Nol ($D = 0$)

Akar kembar: $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$. Solusi pertama: $y_1 = e^{rx}$.

Dari Mana Muncul Faktor Pengali x (Metode Reduksi Orde)?

Asumsikan $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^{rx}$.

Turunkan dua kali dan substitusi ke $ay'' + by' + cy = 0$:

$$e^{rx} \left[au'' + \underbrace{(2ar + b)}_{=0} u' + \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} u \right] = 0$$

$$au'' = 0 \implies u''(x) = 0 \implies u(x) = Cx \implies \mathbf{y_2(x) = xe^{rx}}$$

Kasus 2: Diskriminan Nol ($D = 0$)

Akar kembar: $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$. Solusi pertama: $y_1 = e^{rx}$.

Dari Mana Muncul Faktor Pengali x (Metode Reduksi Orde)?

Asumsikan $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^{rx}$.

Turunkan dua kali dan substitusi ke $ay'' + by' + cy = 0$:

$$e^{rx} \left[au'' + \underbrace{(2ar + b)}_{=0} u' + \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} u \right] = 0$$

$$au'' = 0 \implies u''(x) = 0 \implies u(x) = Cx \implies y_2(x) = xe^{rx}$$

Solusi Umum Kasus 2

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$$

Contoh Kasus 2 (Akar Kembar - IVP)

Soal: Selesaikan IVP: $y'' + 4y' + 4y = 0$ dengan $y(0) = 2$ dan $y'(0) = 1$.

Contoh Kasus 2 (Akar Kembar - IVP)

Soal: Selesaikan IVP: $y'' + 4y' + 4y = 0$ dengan $y(0) = 2$ dan $y'(0) = 1$.

Penyelesaian Langkah Demi Langkah:

① Karakteristik: $r^2 + 4r + 4 = 0 \implies (r + 2)^2 = 0 \implies r = -2$.

Contoh Kasus 2 (Akar Kembar - IVP)

Soal: Selesaikan IVP: $y'' + 4y' + 4y = 0$ dengan $y(0) = 2$ dan $y'(0) = 1$.

Penyelesaian Langkah Demi Langkah:

- 1 Karakteristik: $r^2 + 4r + 4 = 0 \implies (r + 2)^2 = 0 \implies r = -2$.
- 2 Solusi umum: $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.

Contoh Kasus 2 (Akar Kembar - IVP)

Soal: Selesaikan IVP: $y'' + 4y' + 4y = 0$ dengan $y(0) = 2$ dan $y'(0) = 1$.

Penyelesaian Langkah Demi Langkah:

- 1 Karakteristik: $r^2 + 4r + 4 = 0 \implies (r + 2)^2 = 0 \implies r = -2$.
- 2 Solusi umum: $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.
- 3 Turunan: $y'(x) = C_2e^{-2x} - 2(C_1 + C_2x)e^{-2x} = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-2x}$.

Contoh Kasus 2 (Akar Kembar - IVP)

Soal: Selesaikan IVP: $y'' + 4y' + 4y = 0$ dengan $y(0) = 2$ dan $y'(0) = 1$.

Penyelesaian Langkah Demi Langkah:

- 1 Karakteristik: $r^2 + 4r + 4 = 0 \implies (r + 2)^2 = 0 \implies r = -2$.
- 2 Solusi umum: $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.
- 3 Turunan: $y'(x) = C_2e^{-2x} - 2(C_1 + C_2x)e^{-2x} = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-2x}$.
- 4 Terapkan nilai awal:

$$y(0) = C_1 = 2$$

$$y'(0) = C_2 - 2C_1 = 1 \implies C_2 - 2(2) = 1 \implies C_2 = 5$$

$$y(x) = (2 + 5x)e^{-2x}$$

Kasus 3: Diskriminan Negatif ($D < 0$)

Akar kompleks konjugat: $r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, dengan $\alpha = -\frac{b}{2a}$ dan $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Kasus 3: Diskriminan Negatif ($D < 0$)

Akar kompleks konjugat: $r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, dengan $\alpha = -\frac{b}{2a}$ dan $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Penurunan Bentuk Riil Menggunakan Formula Euler

Solusi kompleks: $y = c_1 e^{(\alpha+j\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)x} = e^{\alpha x} (c_1 e^{j\beta x} + c_2 e^{-j\beta x})$.

Gunakan $e^{\pm j\beta x} = \cos \beta x \pm j \sin \beta x$:

$$y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2) \cos \beta x + j(c_1 - c_2) \sin \beta x]$$

Definisikan konstanta riil: $C_1 = c_1 + c_2$ dan $C_2 = j(c_1 - c_2)$.

Kasus 3: Diskriminan Negatif ($D < 0$)

Akar kompleks konjugat: $r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, dengan $\alpha = -\frac{b}{2a}$ dan $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Penurunan Bentuk Riil Menggunakan Formula Euler

Solusi kompleks: $y = c_1 e^{(\alpha+j\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)x} = e^{\alpha x} (c_1 e^{j\beta x} + c_2 e^{-j\beta x})$.

Gunakan $e^{\pm j\beta x} = \cos \beta x \pm j \sin \beta x$:

$$y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2) \cos \beta x + j(c_1 - c_2) \sin \beta x]$$

Definisikan konstanta riil: $C_1 = c_1 + c_2$ dan $C_2 = j(c_1 - c_2)$.

Solusi Umum Kasus 3 (Osilasi Sinusoidal Teredam)

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

α = faktor pembungkus redaman (*damping envelope*), β = frekuensi sudut teredam.

Aplikasi Rekayasa Elektro: Rangkaian Tangki LC (*RF Tank*)

Tinjau rangkaian tertutup L dan C tanpa resistor ($R = 0$).

$$v_L + v_C = 0$$

Karena $v_L = L \frac{d^2 q}{dt^2}$ dan $v_C = \frac{q}{C}$:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Aplikasi Rekayasa Elektro: Rangkaian Tangki LC (*RF Tank*)

Tinjau rangkaian tertutup L dan C tanpa resistor ($R = 0$).

$$v_L + v_C = 0$$

Karena $v_L = L \frac{d^2 q}{dt^2}$ dan $v_C = \frac{q}{C}$:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Solusi Osilasi Harmonik Abadi

Karakteristik: $r^2 + \omega_0^2 = 0 \implies r = \pm j\omega_0$ ($\alpha = 0$).

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t)$$

Aplikasi Rekayasa Elektro: Rangkaian Tangki LC (*RF Tank*)

Tinjau rangkaian tertutup L dan C tanpa resistor ($R = 0$).

$$v_L + v_C = 0$$

Karena $v_L = L \frac{d^2 q}{dt^2}$ dan $v_C = \frac{q}{C}$:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Solusi Osilasi Harmonik Abadi

Karakteristik: $r^2 + \omega_0^2 = 0 \implies r = \pm j\omega_0$ ($\alpha = 0$).

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t)$$

Kekekalan Energi Total

$$E_L + E_C = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} = \text{Konstan}$$

Kuis Interaktif 1: Menentukan Karakteristik Sistem

Soal: Sebuah rangkaian memiliki PDB arus: $i'' + 6i' + 25i = 0$. Tentukan jenis redamannya dan frekuensi sudut osilasinya β !

Kuis Interaktif 1: Menentukan Karakteristik Sistem

Soal: Sebuah rangkaian memiliki PDB arus: $i'' + 6i' + 25i = 0$. Tentukan jenis redamannya dan frekuensi sudut osilasinya β !

Pembahasan:

1 Karakteristik: $r^2 + 6r + 25 = 0$.

Kuis Interaktif 1: Menentukan Karakteristik Sistem

Soal: Sebuah rangkaian memiliki PDB arus: $i'' + 6i' + 25i = 0$. Tentukan jenis redamannya dan frekuensi sudut osilasinya β !

Pembahasan:

- 1 Karakteristik: $r^2 + 6r + 25 = 0$.
- 2 Diskriminan: $D = 6^2 - 4(1)(25) = 36 - 100 = -64 < 0$ (**Kasus 3: Underdamped**).

Kuis Interaktif 1: Menentukan Karakteristik Sistem

Soal: Sebuah rangkaian memiliki PDB arus: $i'' + 6i' + 25i = 0$. Tentukan jenis redamannya dan frekuensi sudut osilasinya β !

Pembahasan:

- 1 Karakteristik: $r^2 + 6r + 25 = 0$.
- 2 Diskriminan: $D = 6^2 - 4(1)(25) = 36 - 100 = -64 < 0$ (**Kasus 3: Underdamped**).
- 3 Akar-akar:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = -3 \pm 4j$$

- 4 Parameter: Konstanta redaman $\alpha = -3$, Frekuensi sudut $\beta = 4$ rad/s.

$$i(t) = e^{-3t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)$$

Kuis Interaktif 2: Analisis Kondisi Redaman Kritis

Soal: Diberikan PDB: $y'' + ky' + 16y = 0$. Tentukan nilai konstanta positif k agar sistem berada dalam kondisi **Redaman Kritis** (***Critically Damped***)!

Kuis Interaktif 2: Analisis Kondisi Redaman Kritis

Soal: Diberikan PDB: $y'' + ky' + 16y = 0$. Tentukan nilai konstanta positif k agar sistem berada dalam kondisi **Redaman Kritis** (***Critically Damped***)!

Pembahasan:

- 1 Syarat redaman kritis adalah diskriminan bernilai tepat nol:

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

Kuis Interaktif 2: Analisis Kondisi Redaman Kritis

Soal: Diberikan PDB: $y'' + ky' + 16y = 0$. Tentukan nilai konstanta positif k agar sistem berada dalam kondisi **Redaman Kritis** (*Critically Damped*)!

Pembahasan:

- 1 Syarat redaman kritis adalah diskriminan bernilai tepat nol:

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

- 2 Substitusikan parameter: $a = 1, b = k, c = 16$:

$$k^2 - 4(1)(16) = 0 \implies k^2 - 64 = 0$$

Kuis Interaktif 2: Analisis Kondisi Redaman Kritis

Soal: Diberikan PDB: $y'' + ky' + 16y = 0$. Tentukan nilai konstanta positif k agar sistem berada dalam kondisi **Redaman Kritis** (*Critically Damped*)!

Pembahasan:

- ① Syarat redaman kritis adalah diskriminan bernilai tepat nol:

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

- ② Substitusikan parameter: $a = 1, b = k, c = 16$:

$$k^2 - 4(1)(16) = 0 \implies k^2 - 64 = 0$$

- ③ Diperoleh:

$$k = \sqrt{64} = 8 \quad (\text{karena } k > 0)$$

Saat $k = 8$, persamaan karakteristik memiliki akar kembar $r = -4$.

Rangkuman Materi Minggu 4

- ➊ PDB linier orde 2 homogen $ay'' + by' + cy = 0$ diselesaikan melalui akar karakteristik $ar^2 + br + c = 0$.
- ➋ Kebebasan linier pasangan basis dibuktikan dengan determinan Wronskian $W(y_1, y_2) \neq 0$.
- ➌ Suku xe^{rx} pada kasus akar kembar diturunkan secara formal dari metode reduksi orde.
- ➍ Tiga tipe respons fisik:
 - $D > 0$: *Overdamped* (lambat, tanpa osilasi).
 - $D = 0$: *Critically Damped* (paling cepat mencapai stabil, tanpa osilasi).
 - $D < 0$: *Underdamped* (berosilasi teredam).
- ➎ Pada rangkaian LC murni ($R = 0$), $\alpha = 0$ menghasilkan osilasi harmonik alami abadi $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.