

Persamaan Diferensial

Minggu 5: PDB Linier Orde 2 Non-Homogen & Analisis Transien RLC Seri

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 2)

- **CPMK 2.1:** Memahami struktur solusi total PDB non-homogen: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
- **CPMK 2.2:** Menguasai metode koefisien tak tentu (*Method of Undetermined Coefficients*) untuk fungsi eksponensial, polinomial, dan trigonometrik.
- **CPMK 2.3:** Memahami aturan modifikasi saat terjadi resonansi.
- **CPMK 2.4:** Menganalisis secara komprehensif respons transien dan tunak pada rangkaian RLC seri.

Daftar Isi

- 1 Struktur Solusi PDB Non-Homogen
- 2 Metode Koefisien Tak Tentu
- 3 Pemodelan Lengkap RLC Seri

Bentuk Umum PDB Orde 2 Non-Homogen

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Prinsip Superposisi & Solusi Total

Bentuk Umum PDB Orde 2 Non-Homogen

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Teorema Solusi Total

Solusi lengkap $y(x)$ selalu merupakan penjumlahan dari dua bagian:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

- $y_h(x)$ (*Homogeneous Solution*): Solusi dari $ay'' + by' + cy = 0$ (respons alami/transien).
- $y_p(x)$ (*Particular Solution*): Solusi khusus yang memenuhi ruas kanan $g(x)$ (respons paksa/keadaan mantap).

Tabel Pemilihan Tebakan Solusi Partikular $y_p(x)$

Bentuk Ruas Kanan $g(x)$	Tebakan Solusi Partikular $y_p(x)$
Polinomial $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$
Eksponensial e^{kx}	Ae^{kx}
Sinusoidal $\cos(\omega x)$ atau $\sin(\omega x)$	$A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
Kombinasi $e^{kx} \sin(\omega x)$	$e^{kx} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$

Tabel Pemilihan Tebakan Solusi Partikular $y_p(x)$

Bentuk Ruas Kanan $g(x)$	Tebakan Solusi Partikular $y_p(x)$
Polinomial $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$
Eksponensial e^{kx}	Ae^{kx}
Sinusoidal $\cos(\omega x)$ atau $\sin(\omega x)$	$A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
Kombinasi $e^{kx} \sin(\omega x)$	$e^{kx} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$

Aturan Modifikasi (Resonansi)

Jika tebakan $y_p(x)$ mengandung suku yang sudah muncul pada $y_h(x)$, kalikan tebakan dengan x (atau x^2) hingga tidak ada suku yang berulang!

Contoh Soal: Koefisien Tak Tentu

Soal: Tentukan solusi umum dari $y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}$.

Contoh Soal: Koefisien Tak Tentu

Soal: Tentukan solusi umum dari $y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}$.

Langkah 1: Cari Solusi Homogen $y_h(x)$

Karakteristik: $r^2 + 3r + 2 = 0 \implies (r + 1)(r + 2) = 0 \implies r_1 = -1, r_2 = -2$.

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Contoh Soal: Koefisien Tak Tentu

Soal: Tentukan solusi umum dari $y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}$.

Langkah 1: Cari Solusi Homogen $y_h(x)$

Karakteristik: $r^2 + 3r + 2 = 0 \implies (r + 1)(r + 2) = 0 \implies r_1 = -1, r_2 = -2$.

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Langkah 2: Cari Solusi Partikular $y_p(x)$

Tebak $y_p = Ae^{3x} \implies y_p' = 3Ae^{3x}, \quad y_p'' = 9Ae^{3x}$.

Contoh Soal: Koefisien Tak Tentu

Soal: Tentukan solusi umum dari $y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}$.

Langkah 1: Cari Solusi Homogen $y_h(x)$

Karakteristik: $r^2 + 3r + 2 = 0 \implies (r + 1)(r + 2) = 0 \implies r_1 = -1, r_2 = -2$.

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Langkah 2: Cari Solusi Partikular $y_p(x)$

Tebak $y_p = Ae^{3x} \implies y_p' = 3Ae^{3x}, y_p'' = 9Ae^{3x}$. Substitusikan:

$$9Ae^{3x} + 3(3Ae^{3x}) + 2(Ae^{3x}) = 4e^{3x} \implies 20Ae^{3x} = 4e^{3x} \implies A = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Contoh Soal: Koefisien Tak Tentu

Soal: Tentukan solusi umum dari $y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}$.

Langkah 1: Cari Solusi Homogen $y_h(x)$

Karakteristik: $r^2 + 3r + 2 = 0 \implies (r+1)(r+2) = 0 \implies r_1 = -1, r_2 = -2$.

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Langkah 2: Cari Solusi Partikular $y_p(x)$

Tebak $y_p = Ae^{3x} \implies y_p' = 3Ae^{3x}, y_p'' = 9Ae^{3x}$. Substitusikan:

$$9Ae^{3x} + 3(3Ae^{3x}) + 2(Ae^{3x}) = 4e^{3x} \implies 20Ae^{3x} = 4e^{3x} \implies A = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Solusi Lengkap

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$$

Rangkaian RLC Seri dengan Sumber Sinusoidal

Persamaan KVL Rangkaian

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV(t)}{dt} = V_m \omega \cos(\omega t)$$

Rangkaian RLC Seri dengan Sumber Sinusoidal

Persamaan KVL Rangkaian

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV(t)}{dt} = V_m \omega \cos(\omega t)$$

Parameter Rangkaian:

- Koefisien Redaman: $\alpha = \frac{R}{2L}$
- Frekuensi Resonansi: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Rangkaian RLC Seri dengan Sumber Sinusoidal

Persamaan KVL Rangkaian

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV(t)}{dt} = V_m \omega \cos(\omega t)$$

Parameter Rangkaian:

- Koefisien Redaman: $\alpha = \frac{R}{2L}$
- Frekuensi Resonansi: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Tiga Rezim Redaman:

- $\alpha < \omega_0$: *Underdamped*
- $\alpha = \omega_0$: *Critically Damped*
- $\alpha > \omega_0$: *Overdamped*

Verifikasi dengan Julia: RLC Seri Interaktif

Simulasi Interaktif

Pada praktikum Julia Minggu 5:

- Menyelesaikan sistem keadaan (*state-space*) menggunakan algoritma Runge-Kutta 4 (RK4).
- Membandingkan ketiga kurva redaman secara visual.
- Mengamati fenomena resonansi listrik saat $\omega = \omega_0$.

- 1 Solusi PDB non-homogen adalah kombinasi linear dari solusi komplementer/homogen dan solusi partikular.
- 2 Resonansi terjadi saat frekuensi pemaksa sama dengan frekuensi natural sistem.
- 3 Perilaku transien dikendalikan oleh akar-akar homogen, sementara perilaku tunak jangka panjang dikendalikan oleh solusi partikular.