

# Persamaan Diferensial

## Minggu 6: Transformasi Laplace Dasar & Teorema Pergeseran

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro  
Universitas Bengkulu

2026

*Tanggal Kompilasi: September 7, 2026*

# Capaian Pembelajaran (CPMK 3)

- **CPMK 3.1:** Memahami motivasi dan definisi matematis Transformasi Laplace: mengubah domain waktu  $t$  ke domain frekuensi kompleks  $s$ .
- **CPMK 3.2:** Mampu menurunkan transformasi fungsi-fungsi dasar ( $1, t^n, e^{at}, \sin \omega t, \cos \omega t$ ).
- **CPMK 3.3:** Menguasai sifat kelinieran dan Teorema Pergeseran Pertama (\*First Shifting Theorem\*).
- **CPMK 3.4:** Menurunkan Transformasi Laplace dari turunan fungsi:  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$  dan  $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ .

# Daftar Isi

- 1 Definisi Transformasi Laplace
- 2 Transformasi Fungsi-Fungsi Dasar
- 3 Sifat-Sifat Penting Transformasi Laplace
- 4 Kuis & Rangkuman

# Mengapa Menggunakan Domain Laplace ( $s$ )?

## Kelemahan Metode Klasik:

- Menyelesaikan PDB butuh mencari  $y_h$ , lalu  $y_p$ , lalu memasukkan IVP.
- Rumit untuk sumber tegangan impulsif atau gelombang tangga (\*step function\*).

# Mengapa Menggunakan Domain Laplace ( $s$ )?

## Kelemahan Metode Klasik:

- Menyelesaikan PDB butuh mencari  $y_h$ , lalu  $y_p$ , lalu memasukkan IVP.
- Rumit untuk sumber tegangan impulsif atau gelombang tangga (\*step function\*).

## Keunggulan Laplace:

- Mengubah operasi kalkulus (turunan/integral) menjadi **aljabar biasa**.
- Syarat awal (IVP) langsung masuk di awal penurunan aljabar!

# Mengapa Menggunakan Domain Laplace ( $s$ )?

## Kelemahan Metode Klasik:

- Menyelesaikan PDB butuh mencari  $y_h$ , lalu  $y_p$ , lalu memasukkan IVP.
- Rumit untuk sumber tegangan impulsif atau gelombang tangga (\*step function\*).

## Keunggulan Laplace:

- Mengubah operasi kalkulus (turunan/integral) menjadi **aljabar biasa**.
- Syarat awal (IVP) langsung masuk di awal penurunan aljabar!

## Definisi Integral Laplace

Untuk fungsi  $f(t)$  yang terdefinisi pada  $t \geq 0$ :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

dengan  $s = \sigma + j\omega$  adalah variabel frekuensi kompleks.

# Penurunan Fungsi Elementer

## 1. Fungsi Konstan: $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = 0 - \left( -\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

# Penurunan Fungsi Elementer

## 1. Fungsi Konstan: $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = 0 - \left( -\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

## 2. Fungsi Eksponensial: $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

# Penurunan Fungsi Elementer

## 1. Fungsi Konstan: $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = 0 - \left( -\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

## 2. Fungsi Eksponensial: $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

## 3. Fungsi Pangkat: $f(t) = t^n$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}, s > 0)$$

# Tabel Standar Transformasi Laplace

| $f(t)$           | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  | $f(t)$                  | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$      |
|------------------|-------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| 1                | $\frac{1}{s}$                 | $t^n$                   | $\frac{n!}{s^{n+1}}$              |
| $e^{at}$         | $\frac{1}{s-a}$               | $\cos(\omega t)$        | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$          |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\cosh(at)$             | $\frac{s}{s^2-a^2}$               |
| $\sinh(at)$      | $\frac{a}{s^2-a^2}$           | $e^{at} \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ |

# Teorema Pergeseran Pertama (s-Shifting)

## Teorema Pergeseran Sumbu $s$

Jika  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , maka:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

# Teorema Pergeseran Pertama (s-Shifting)

## Teorema Pergeseran Sumbu $s$

Jika  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , maka:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

**Contoh Soal:** Tentukan  $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\}$ .

- Fungsi dasar:  $f(t) = \cos(3t) \implies F(s) = \frac{s}{s^2+3^2} = \frac{s}{s^2+9}$ .

# Teorema Pergeseran Pertama (s-Shifting)

## Teorema Pergeseran Sumbu $s$

Jika  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , maka:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

**Contoh Soal:** Tentukan  $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\}$ .

- Fungsi dasar:  $f(t) = \cos(3t) \implies F(s) = \frac{s}{s^2+3^2} = \frac{s}{s^2+9}$ .
- Dengan  $a = -2$ , ganti setiap  $s$  dengan  $(s - (-2)) = (s + 2)$ :

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\} = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9} = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 13}$$

# Transformasi Turunan Fungsi (Kunci Penyelesaian PDB)

## Teorema Transformasi Turunan

- Turunan Pertama:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

- Turunan Kedua:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

# Transformasi Turunan Fungsi (Kunci Penyelesaian PDB)

## Teorema Transformasi Turunan

- Turunan Pertama:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

- Turunan Kedua:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

*Catatan: Kondisi awal  $f(0)$  dan  $f'(0)$  langsung terintegrasi secara otomatis saat menerapkan transformasi!*

**Soal:** Tentukan  $\mathcal{L}\{t^2 e^{5t}\}$ .

**Soal:** Tentukan  $\mathcal{L}\{t^2 e^{5t}\}$ .

**Solusi:**

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}.$$

**Soal:** Tentukan  $\mathcal{L}\{t^2 e^{5t}\}$ .

**Solusi:**

①  $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}.$

② Geser  $s \rightarrow s - 5$ :

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{5t}\} = \frac{2}{(s - 5)^3}$$

# Rangkuman Materi Minggu 6

- 1 Transformasi Laplace memetakan fungsi domain waktu  $t$  ke aljabar kompleks domain  $s$ .
- 2 Sifat pergeseran pertama mengalikan fungsi dengan eksponensial  $e^{at} \iff$  menggeser frekuensi  $s - a$ .
- 3 Transformasi turunan merupakan jembatan utama untuk mengubah PDB menjadi persamaan aljabar.