

Persamaan Diferensial

Minggu 7: Invers Transformasi Laplace & Solusi PDB pada Rangkaian Elektrik

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 3)

- **CPMK 3.1:** Menguasai teknik Invers Transformasi Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.
- **CPMK 3.2:** Mampu melakukan ekspansi pecahan parsial (*Partial Fraction Expansion*) untuk faktor linear, berulang, dan kuadratik irreducible.
- **CPMK 3.3:** Menerapkan Transformasi Laplace penuh untuk menyelesaikan PDB dan IVP sistem dinamis.
- **CPMK 3.4:** Menyelesaikan analisis transien rangkaian listrik menggunakan pendekatan domain-s (impedansi operasional).

Daftar Isi

- 1 Metode Invers Transformasi Laplace
- 2 Ekspansi Pecahan Parsial (Partial Fractions)
- 3 Alur Lengkap Penyelesaian PDB dengan Laplace
- 4 Aplikasi Rangkaian Elektrik

Konsep Invers Transformasi Laplace

Definisi

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka invers transformasi Laplace didefinisikan sebagai:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Konsep Invers Transformasi Laplace

Definisi

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka invers transformasi Laplace didefinisikan sebagai:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Sifat Kelinearan:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Konsep Invers Transformasi Laplace

Definisi

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka invers transformasi Laplace didefinisikan sebagai:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Sifat Kelinieran:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Strategi Praktis di Bidang Rekayasa

Alih-alih menghitung integral invers kompleks Bromwich, kita menguraikan rasio polinomial $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ menjadi suku-suku pecahan sederhana yang ada di tabel standar!

Tiga Kasus Faktor Penyebut $D(s)$

1 Faktor Linear Berbeda $(s - p_1)(s - p_2)$:

$$\frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} \Rightarrow f(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

Tiga Kasus Faktor Penyebut $D(s)$

❶ Faktor Linear Berbeda $(s - p_1)(s - p_2)$:

$$\frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} \implies f(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

❷ Faktor Linear Berulang $(s - p)^n$:

$$\frac{N(s)}{(s - p)^n} = \frac{A_1}{s - p} + \frac{A_2}{(s - p)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s - p)^n}$$

Tiga Kasus Faktor Penyebut $D(s)$

1 Faktor Linear Berbeda $(s - p_1)(s - p_2)$:

$$\frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} \implies f(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

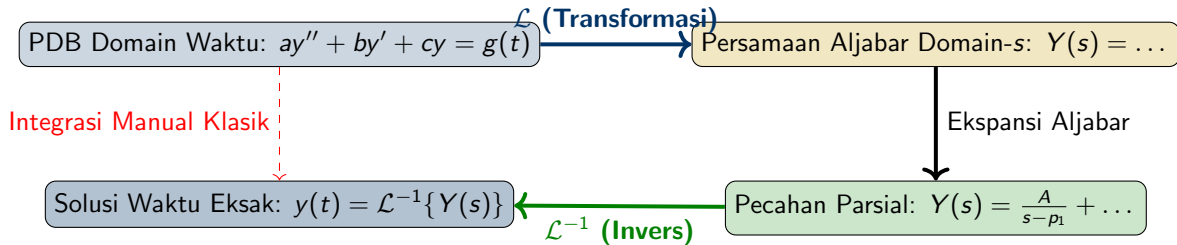
2 Faktor Linear Berulang $(s - p)^n$:

$$\frac{N(s)}{(s - p)^n} = \frac{A_1}{s - p} + \frac{A_2}{(s - p)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s - p)^n}$$

3 Faktor Kuadratik Kompleks $((s - \alpha)^2 + \beta^2)$:

$$\frac{A(s - \alpha) + B\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \implies f(t) = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

Diagram Alir Metode Laplace



Contoh Komprehensif: Penyelesaian IVP Orde 2

Soal: Selesaikan $y'' + 4y = 8e^{2t}$ dengan kondisi awal $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Contoh Komprehensif: Penyelesaian IVP Orde 2

Soal: Selesaikan $y'' + 4y = 8e^{2t}$ dengan kondisi awal $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Langkah 1: Transformasikan ke Domain s

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = \frac{8}{s-2}$$

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{8}{s-2} \implies Y(s) = \frac{8}{(s-2)(s^2 + 4)}$$

Contoh Komprehensif: Penyelesaian IVP Orde 2

Soal: Selesaikan $y'' + 4y = 8e^{2t}$ dengan kondisi awal $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Langkah 1: Transformasikan ke Domain s

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = \frac{8}{s-2}$$

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{8}{s-2} \implies Y(s) = \frac{8}{(s-2)(s^2 + 4)}$$

Langkah 2: Pecahan Parsial

$$\frac{8}{(s-2)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$

Samakan pembilang: $8 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s - 2)$.

- Untuk $s = 2$: $8 = A(8) \implies A = 1$.
- Samakan koefisien s^2 : $A + B = 0 \implies B = -1$.
- Samakan konstanta: $4A - 2C = 8 \implies 4(1) - 2C = 8 \implies C = -2$.

Langkah 3: Invers Transformasi ke Domain Waktu

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{s+2}{s^2+4} = \frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{2}{s^2+2^2}$$

Langkah 3: Invers Transformasi ke Domain Waktu

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{s+2}{s^2+4} = \frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{2}{s^2+2^2}$$

Terapkan tabel invers standar:

Solusi Khusus PDB

$$y(t) = e^{2t} - \cos(2t) - \sin(2t)$$

Catatan: Kondisi awal $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$ sudah otomatis terbukti!

Analisis Rangkaian dengan Impedansi Kompleks s

Komponen	Hubungan Waktu t	Impedansi Laplace $Z(s)$
Resistor (R)	$v(t) = Ri(t)$	$Z_R(s) = R$
Induktor (L)	$v(t) = L \frac{di}{dt}$	$Z_L(s) = sL$ (dengan sumber $Li(0)$)
Kapasitor (C)	$i(t) = C \frac{dv}{dt}$	$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ (dengan sumber $\frac{v(0)}{s}$)

Analisis Rangkaian dengan Impedansi Kompleks s

Komponen	Hubungan Waktu t	Impedansi Laplace $Z(s)$
Resistor (R)	$v(t) = Ri(t)$	$Z_R(s) = R$
Induktor (L)	$v(t) = L \frac{di}{dt}$	$Z_L(s) = sL$ (dengan sumber $Li(0)$)
Kapasitor (C)	$i(t) = C \frac{dv}{dt}$	$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ (dengan sumber $\frac{v(0)}{s}$)

Hukum Ohm Domain- s : $V(s) = I(s) \cdot Z(s)$.

Rangkuman Materi Minggu 7

- 1 Transformasi Laplace mengubah proses turunan kalkulus menjadi manipulasi pecahan aljabar.
- 2 Kondisi awal dimasukkan langsung di langkah awal perumusan.
- 3 Ini merupakan metode fondasi dalam teori sistem kendali (*Control Systems*) dan analisis rangkaian elektrik transien.