

Persamaan Diferensial

Minggu 9: Pengantar Persamaan Diferensial Parsial (PDP) & Analisis Deret Fourier

Novalio Daratha & Muhammad Arfan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Bengkulu

2026

Tanggal Kompilasi: September 7, 2026

Capaian Pembelajaran (CPMK 4)

- **CPMK 4.1:** Memahami perbedaan mendasar antara PDB (1 variabel bebas) dan PDP (multi-variabel bebas seperti ruang x, y dan waktu t).
- **CPMK 4.2:** Memahami teorema ortogonalitas fungsi trigonometri.
- **CPMK 4.3:** Mampu menghitung koefisien Deret Fourier (a_0, a_n, b_n) untuk sinyal periodik non-sinusoidal.
- **CPMK 4.4:** Memanfaatkan simetri fungsi genap (*cosine series*) dan fungsi ganjil (*sine series*) untuk mempermudah integrasi.

Daftar Isi

- 1 Pengantar Persamaan Diferensial Parsial (PDP)
- 2 Fondasi Deret Fourier Trigonometrik
- 3 Simetri Fungsi: Genap & Ganjil
- 4 Kuis & Rangkuman

Mengapa Kita Membutuhkan PDP?

Dalam fenomena fisik elektro, besaran seringkali bergantung pada **posisi spasial** (x, y, z) DAN **waktu** (t).

Tiga Persamaan Klasik PDP dalam Teknik Elektro

1. Persamaan Gelombang 1D (Saluran Transmisi):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Mengapa Kita Membutuhkan PDP?

Dalam fenomena fisik elektro, besaran seringkali bergantung pada **posisi spasial** (x, y, z) DAN **waktu** (t).

Tiga Persamaan Klasik PDP dalam Teknik Elektro

❶ Persamaan Gelombang 1D (Saluran Transmisi):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

❷ Persamaan Panas/Difusi 1D (Pemanasan Kabel):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Mengapa Kita Membutuhkan PDP?

Dalam fenomena fisik elektro, besaran seringkali bergantung pada **posisi spasial** (x, y, z) DAN **waktu** (t).

Tiga Persamaan Klasik PDP dalam Teknik Elektro

1 Persamaan Gelombang 1D (Saluran Transmisi):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2 Persamaan Panas/Difusi 1D (Pemanasan Kabel):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3 Persamaan Laplace 2D (Medan Elektrostatik):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Prinsip Representasi Deret Fourier

Teorema Fourier

Setiap fungsi periodik $f(t)$ dengan periode $T = 2L$ yang memenuhi syarat Dirichlet dapat diuraikan menjadi jumlahan tak hingga gelombang harmonik sinus dan kosinus:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \right)$$

Prinsip Representasi Deret Fourier

Teorema Fourier

Setiap fungsi periodik $f(t)$ dengan periode $T = 2L$ yang memenuhi syarat Dirichlet dapat diuraikan menjadi jumlahan tak hingga gelombang harmonik sinus dan kosinus:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \right)$$

Rumus Euler-Fourier untuk Koefisien:

- Nilai Rata-rata: $a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt$
- Koefisien Kosinus: $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) dt$
- Koefisien Sinus: $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \left(\frac{n\pi t}{L} \right) dt$

Memanfaatkan Sifat Simetri Gelombang

Fungsi Genap: $f(-t) = f(t)$

- Simetri terhadap sumbu-y.
- Hanya memuat suku kosinus!
- $b_n = 0$
- $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$

Contoh: Gelombang segitiga genap, $\cos(\omega t)$.

Memanfaatkan Sifat Simetri Gelombang

Fungsi Genap: $f(-t) = f(t)$

- Simetri terhadap sumbu-y.
- Hanya memuat suku kosinus!
- $b_n = 0$
- $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$

Contoh: Gelombang segitiga genap, $\cos(\omega t)$.

Fungsi Ganjil: $f(-t) = -f(t)$

- Simetri terhadap titik asal $(0, 0)$.
- Hanya memuat suku sinus!
- $a_0 = 0, \quad a_n = 0$
- $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$

Contoh: Gelombang kotak simetris, gelombang gigi gergaji, $\sin(\omega t)$.

Contoh Nyata: Penguraian Harmonik Gelombang Kotak

Tinjau gelombang kotak ganjil: $f(t) = -V_0$ untuk $-\pi < t < 0$, dan $f(t) = +V_0$ untuk $0 < t < \pi$ ($L = \pi$).

Contoh Nyata: Penguraian Harmonik Gelombang Kotak

Tinjau gelombang kotak ganjil: $f(t) = -V_0$ untuk $-\pi < t < 0$, dan $f(t) = +V_0$ untuk $0 < t < \pi$ ($L = \pi$). Karena fungsi ganjil: $a_0 = 0, a_n = 0$.

Contoh Nyata: Penguraian Harmonik Gelombang Kotak

Tinjau gelombang kotak ganjil: $f(t) = -V_0$ untuk $-\pi < t < 0$, dan $f(t) = +V_0$ untuk $0 < t < \pi$ ($L = \pi$). Karena fungsi ganjil: $a_0 = 0$, $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_0 \sin(nt) dt = \frac{2V_0}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

Contoh Nyata: Penguraian Harmonik Gelombang Kotak

Tinjau gelombang kotak ganjil: $f(t) = -V_0$ untuk $-\pi < t < 0$, dan $f(t) = +V_0$ untuk $0 < t < \pi$ ($L = \pi$). Karena fungsi ganjil: $a_0 = 0, a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_0 \sin(nt) dt = \frac{2V_0}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

- Jika n genap ($n = 2, 4, 6, \dots$): $b_n = 0$.
- Jika n ganjil ($n = 1, 3, 5, \dots$): $b_n = \frac{4V_0}{n\pi}$.

Contoh Nyata: Penguraian Harmonik Gelombang Kotak

Tinjau gelombang kotak ganjil: $f(t) = -V_0$ untuk $-\pi < t < 0$, dan $f(t) = +V_0$ untuk $0 < t < \pi$ ($L = \pi$). Karena fungsi ganjil: $a_0 = 0, a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_0 \sin(nt) dt = \frac{2V_0}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

- Jika n genap ($n = 2, 4, 6, \dots$): $b_n = 0$.
- Jika n ganjil ($n = 1, 3, 5, \dots$): $b_n = \frac{4V_0}{n\pi}$.

Deret Fourier Gelombang Kotak

$$f(t) = \frac{4V_0}{\pi} \left(\sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \dots \right)$$

Pertanyaan: Sebuah inverter daya menghasilkan tegangan bolak-balik $v(t) = v(-t)$. Manakah koefisien Fourier yang bernilai pasti nol tanpa perlu dihitung?

Pertanyaan: Sebuah inverter daya menghasilkan tegangan bolak-balik $v(t) = v(-t)$. Manakah koefisien Fourier yang bernilai pasti nol tanpa perlu dihitung?

Jawaban:

Karena $v(t)$ adalah fungsi **genap** ($v(-t) = v(t)$), maka seluruh koefisien sinus:

$$b_n = 0 \quad \text{untuk seluruh } n \geq 1$$

Sinyal tersebut murni dapat dinyatakan hanya dengan deret kosinus Fourier!

Rangkuman Materi Minggu 9

- 1 PDP melibatkan turunan terhadap ruang dan waktu, membutuhkan ekspansi deret untuk memecahkan batas-batasnya.
- 2 Deret Fourier membedah sinyal non-sinusoidal menjadi spektrum frekuensi harmonik.
- 3 Pengenalan simetri genap/ganjil memangkas separuh proses kalkulasi integral secara efisien.